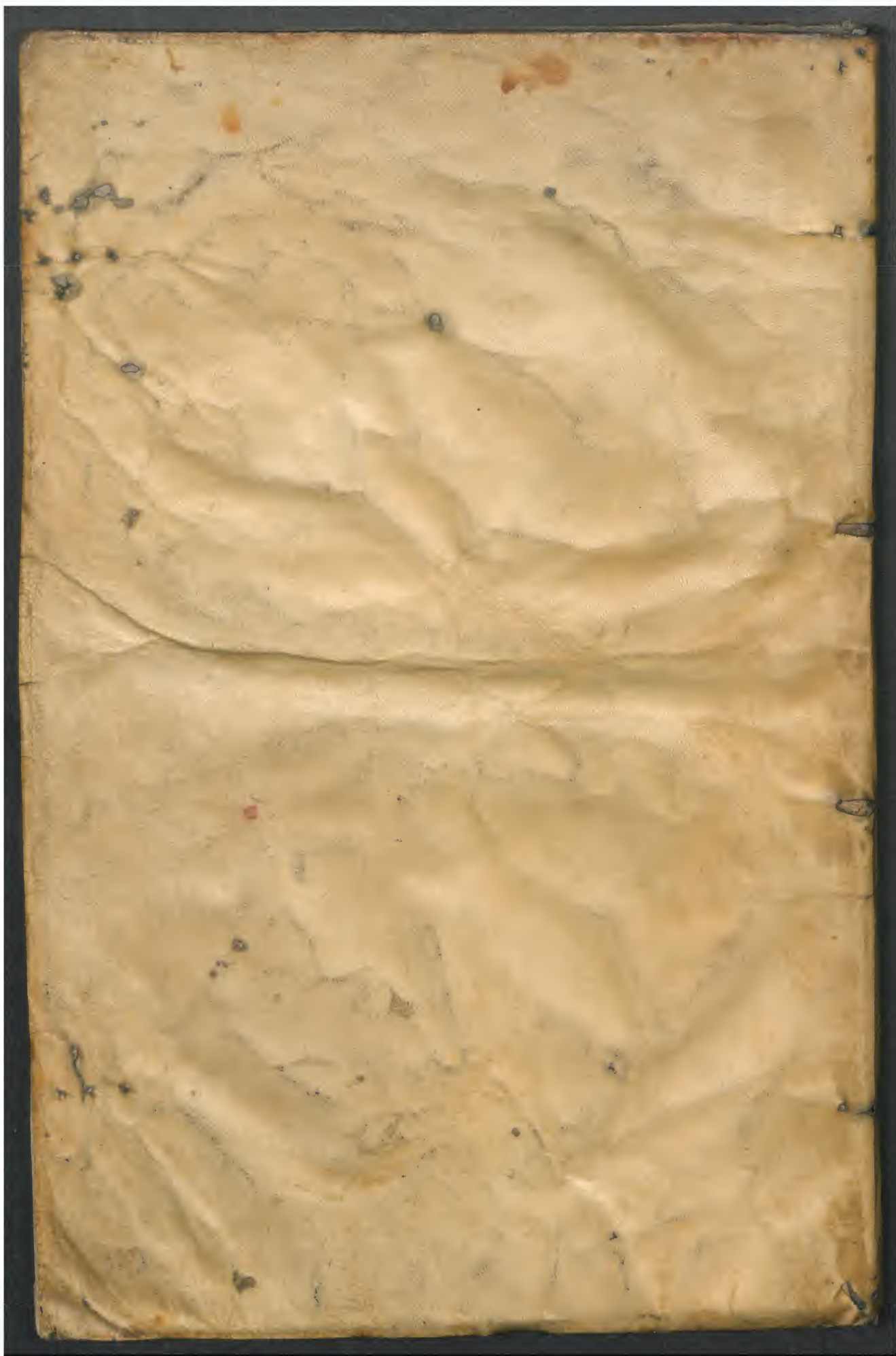




Early European Books, Copyright © 2012 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of The Wellcome Trust, London.
2019/0

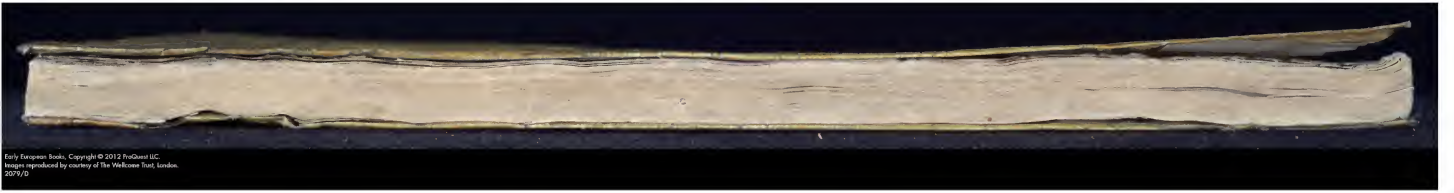




Early European Books, Copyright © 2012 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of The Wellcome Trust, London.
2079/D



Early European Books, Copyright © 2012 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of The Wellcome Trust, London.
2079/D



Early European books, Copyright © 2012 ProQuest LLC.
Image reproduced by courtesy of the Wellcome Trust, London.
2019/9

147 5315

2077/D

N III l

EUCLES

GABRIEL SANCHEZ
LIBRERIA
27, GARCERAN, 21
Madrid.



IACOBI
PELETARII
CENOMANI,



*In Euclidis Elementa Geometrica
Demonstrationum
Libri sex.*

Ad Carolum Lotharingum, Principem,
Cardinalemq; amplissimum.



LVGDVNI,
APVD IOAN. TORNÆSIVM
ET GVL. GAZEIVM.
M. D. LVII.

Cum Priuilegio Regis.



Priuilegij summa.

LITERIS Regijs cautum est Joanni Tornæsio,
Nequis iniussu in tota Galliarum ditione has Iacobi Pe-
letarij Cenomani Demonstrationes hinc ad sextum usque
annum imprimat, néue uspiam impressas vendat. Qui
secus fecerit, pœnis ex sanctione multabitur. Datum Fons-
bellaquei, IIII Non. Maias M. D. LV.



Quæ ad hos sex libros Elementorum contulimus præcipua.



N O V A S Demonstrationes passim ad Euclidem adiecimus: quas ex firmissimis probationum fundamentis, Recto & Æquali, maximè ex Circulo, totius operis Geometrici archetypo, deprompsimus. Demonstrationes nonnullas Theonis & Campani, quum non satis probabiliter, aut non satis appositè confirmarent, emendauimus: cæteras concinniores clarioresq; reddidimus. Improbias Demonstrationes à Geometria exclusimus: illas scilicet, quæ Figurarum, quas vocant, superpositionibus nitebantur. Demonstrauimus ad decimam sextam Tertii, quam nos decimam quintam fecimus, neque lineæ rectæ cum Circulo, neque Circulorum inter se contactû, quantitatem esse: Idq; præter Euclidis sententiam. Et paralogismos inde ortos à Geometria depulimus. Ibidem explicauimus quânam ratione duæ lineæ in eodem plano non paralleli, concurrere non possint: tum ex quo genere esset altera illarum ostendimus. Dubitatio scilicet iam tot seculis inter Geometras indissoluta. Nouas Propositiones à nobis demonstratas suis locis apposuius: nullas tamen in ordinem redegitus. Seriem enim Elementorum ab Euclide collocatam suæ integritati reliquimus: nisi si quando Campanum secuti sumus, quum in varietate non nihil compendii deprehenderemus. numerum tamen Theonis vbique subscripsimus. Illas autem potissimum de nostris addidimus Propositiones, quæ ad effectum Geometriæ pertinebant: vt ad scientiâ vsum adiungeremus. Principia Geometriæ nouis meditationibus illustrauimus, Punctum, Lineam, Superficiem, Circulum ipsum. Sed & Anguli naturam, conformationem, constitutionemq; hætenus non animaduersam explicauimus ad duodecimam Definitionem Primi, tum ad decimam quintam Propositionem Tertii. Quinti Libri Definitiones Geometricè declarauimus, earumq; suspectam difficultatem sustulimus. Rerum naturam in Geometria tanquam in speculo elucere, eamq; è Geometricis speculationibus petendam esse docuimus: quod passim agnoscent qui commentationibus nostris operam daturi sunt. Euclidis verba non religiosè, sed sententiam fideliter sequuti sumus: &

latinè, quoad eius fieri potuit, expressimus.
 Ad Demonstrationum autem formulas, vix mediocrem ornatum at-
 tulimus verborum. Apertam enim simplicitatem retinere maluimus,
 quàm nimis obscuram diligentiam affectare. Atque haud scio an
 hoc argumentum Romanæ linguæ facultatem superet. Geometria
 quippe se ad Latinos tum recepit, quū iam apud eos iacêret dicendi
 studium. Quod quum dico, non iam Impossibilis vocem significo,
 duram illam quidem M. Fabio, tamen Vlpiano receptam, Capite
 Non impossibile puto, Legis De Pactis: sed alias satis multas, quæ
 arti sic inhærebant, vt ab arte excuti non possent. Quinetiam inte-
 gras periodos, nulla modorum aut numerorum ratione seruata,
 exhibere coacti sumus: dum crebras notarum verborumq; iteratio-
 nes fieri necesse fuit: argumento alioqui parum tractabili. Sed cesso
 de his admonere. Verborū enim curiositas, ad rerum pondera (quas
 solas spectat Geometria) parum affert momenti.
 Atque hæc sunt quibus nostram demonstrandi Euclidis rationem ex-
 ponendam esse duximus.

Quæ verò à nobis adiectæ sunt Propositiones, sic habent.

Libro Primo.

AD XV PROPOSITIONEM.

*Si quatuor lineæ ab vno puncto exeuntes, quatuor angulos fecerint, quorum bini oppo-
 siti æquales fuerint: binæ aduersæ in rectum sibi erunt & linea vna.*

AD XXIII.

Dato Triangulo Triangulum æquale & æquilaterum constituere.

AD XXIX.

*Si duæ rectæ lineæ quæ duas parallelos secant, inter ipsas ad vnum punctum coierint,
 duosq; angulos alternos æquales fecerint, aut angulum exteriorem interiori sibi op-
 posito ex eadem parte æqualem, aut denique duos interiores ex alterutra parte
 duobus rectis æquales: eæ duæ lineæ in continuum erunt & linea vna.*

AD XXXIIII.

*Inter duas lineas interminatas ad angulum datum coniunctas, lineam data lineæ æ-
 qualem collocare, quæ cum altera illarum faciat angulum alteri dato angulo
 æqualem. Oportet autem duos angulos datos duobus rectis esse minores.*

AD XXXVIII.

Datum Triangulum in duo æqualia parti.

*A puncto in vno laterum Trianguli signato lineam ducere, quæ Triangulum bifa-
 riam diuidat.*

AD XXXIX.

*Si linea recta duo Trianguli latera per æqualia secuerit, ipsa erit tertio lateri æquidi-
 stans. Ex Campano.*

AD XLII.

*Dato Parallelogrammo æquale Triangulum constituere, habens angulum angulo da-
 to æqualem.*

AD

AD XLIII.

Si Parallelogrammum in duo Supplementa aequalia, duoq; quantacunque Complementa diuisum fuerit: duorum Complementorum dimetientes in continuum erunt, & vna totius Parallelogrammi dimetiens.

AD XLIII.

Super data recta linea dato Parallelogrammo aequale Triangulum constituere, habens angulum angulo dato equalem.

AD XLV.

Propositis duabus Superficiebus rectilineis inequalibus, excessum maioris supra minorem cognoscere.

AD XLVI.

Quæ circa Diametrum Quadrati Parallelogramma, sua latera Quadrati lateribus æquidistantia habuerint, Quadrata esse oportet.

AD XLVII.

Duo Quadrata inequalia ad duo Quadrata aequalia reducere.

Si duo Triangula rectangula æquales subtensas habuerint, Quadrata duorum reliquorum laterum vnius, erunt aequalia quadratis duorum reliquorum laterum alterius.

Propositis duabus lineis inequalibus, potentiam maioris supra minorem cognoscere.

Data Diametro, componere Quadratum cuius est Diameter.

Quadratum Diametri, duplum est Quadrati cuius est Diameter.

AD XLVIII.

Propositis duobus Quadratis, alteri illorum Cnomonem reliquo æqualem adiungere.

Et est Campani: quam tamen nos compendiosius demonstrauimus.

Secundo libro nullas Propositiones interieciimus.

Libro Tertio.

AD VII.

Si duæ lineæ rectæ ab aliquo puncto Diametri exeuntes, angulos æquales cum Diametro fecerint: ipsæ sunt æquales.

AD XV, quæ est Theoni XVI.

Contactus duorum Circulorum interior, quantitas non est.

Contactus lineæ rectæ cum Circulo, quantitas non est.

Contactus duorum Circulorum exterior, quantitas non est.

Anguli qui sunt à Diametro & Peripheria, siue intra siue extra Circulum: recti sunt, & rectis rectilineis æquales.

AD XVI.

Lineæ rectæ quæ Circulum secet, lineam rectam quæ Circulum tangat parallelum ducere.

AD XXX.

Si in Circulo Triangulum rectangulum inscriptum fuerit: latus recto angulo oppositum, Diameter erit Circuli.

AD

AD XXXV.

Si ab eodem puncto extra Circulum signato plures lineæ Circulum secant: quæ ex unaquaque in sui partem extimam fiunt Rectangula, inter se sunt equalia.

Si duæ lineæ ab eodem puncto ductæ, Circulum tetigerint, ipsæ inter se sunt æquales.

Atque hæ duæ posteriores sunt Campani.

Ab vno puncto extra Circulum signato duæ tantum lineæ ad contactum Circuli demitti possunt.

Libro Quarto.

AD V.

Per tria data puncta in directam lineam minimè constituta, Circulum ducere.

AD IX.

Quadratum Circulo circumscriptum, duplum est Quadrati eidem Circulo inscripti.

AD X.

Super data recta linea Pentagonum æquilaterum & æquiangulum constituere.

Ad Librum Quintum nullas Propositiones addidimus, eodem quo neque ad Secundum, consilio. Quæ enim cum Numeris tam coniunctâ habent rationem, sicut Secundi & Quinti materia, præter modum ampliari possunt, ac sine vfu. Quinetiam ab hoc Quinto rescindendæ potius essent Propositiones, quàm vllæ adiiciendæ: quod & nos illuc monuimus.

Libro Sexto.

AD IX.

Dato Medio proportionali, in data linea duo extrema reperire. Oportet autem Medium datum dimidia parte lineæ datæ non esse maius.

AD XXIII.

Propositis duobus Parallelogrammis æquiangulis, sed non similibus: ab vno illorum Parallelogrammum alteri simile refecare.

Inter duas Superficies rectilineas mediam Superficiem rectilineam inuenire.

AD XXXII.

Si, quæ ab vno laterum Trianguli sit Species, æqua fuerit ijs quæ à duobus reliquis lateribus sunt Speciebus similibus similiterq³ descriptis: Rectangulum est ipsum Triangulum.





AD CAROLVM LOTHAR-
RINGVM, PRINCIPEM,
CARDINALEM'QVE
AMPLISSIMVM,



Iacobi Peletarii Cenomani in Euclidis
Elementa Geometrica
Præfatio.



*S*olent, qui docendi munus profitentur, Cardinalis amplissi-
me, multa de argumenti ipsius dignitate asserere: ut consilij
suscepti rationem exponant, & animos hominum facilius
sibi adiungant. Ego verò ad Geometriam accedens, præter of-
ficium & dignitatem mihi facere viderer, si ad eius com-
mendationē, nimis exquisitum artificium adhiberem. Nam
quum cetera artes probabili quadam opinione constent, cer-
tè Geometria (inter Mathematicas spectatissima) veritatis confirmatione seipsam
tuetur & commendat. Quumq; res omnes aut ornatus amplificare, aut testimonio de-
primere, aut deniq; circuitione inuertere possimus: hæc ipsa suo innixa præsidio, per-
petua, simplex & vniuersalis est. Nulla huc controuersia, nulla disceptatio incidit, quæ
non statim ad veritatis fidem probationemq; referatur. Eius quippe rationes non per-
suadent, sed cogunt: etiam ordine ipso, immò adeò Natura ductu quodam. Ut enim
ab exiguis initijs, Natura ad operis perfectionem & absolutionem sensim peruenit: ita
Geometria ab infimis ad altissima, rectè & gradatim sese extollit. Quid Puncto sim-
plicius? quid Circulo absolutius? at ex illo omnia emanant, in hoc omnia concludun-
tur. Ut ne Puncto quidem desit infinitatis admiratio. Quid enim tam mirabile, quàm
à medijs Circuli puncto, quod Centrum vocamus, tot lineas exire, quot ad Periphe-
riam desinunt? Iam verò Problemata ipsa & Theoremata, quum alia ex alijs con-
sequantur, rerum agendarum seriem nobis opportunè referunt: monentq; nihil præ-
posterè, nihil sine consilio aggrediendum, sed omnia ad rationis normam esse diri-
genda. Ad hæc, sicut Natura noui quippiam assidue molitur, ita Geometria semper
aliquid egregium dispicit, exquirat, excogitat. Quamobrem parum intelligenti sunt iudi-
cio, qui Mathematicarum auctoritatem eleuare conantur, tanquàm ea ad animi dele-
tationem, non etiam ad vitæ vsum constituta sint. Nihil enim in rebus humanis ferè
aliud est quod expediat aut iuuat, præter ordinem & proportionem: id est, in omni-
bus moderationem. Ubiq; igitur latet vis quadam Geometria: quæ vtrum plus natura
habeat

habeat an artificij, non satis perspicui potest: nisi quatenus explicat ipsa exercitatio. In
 qua meditatione quanto maiores progressus fecerimus, tanto propius ad Deum acce-
 dere videmur. Ac quemadmodum *N*atus illa aeterna, praeteritorum meminit, praesen-
 tia cernit, futura perspicit, simul verò omnia amplectitur & moderatur: ita pracla-
 rus Geometriae artifex suas cogitationes in vñ collatas, ad rem suam cōuertit, et suū
 quendam *N*undum vniuersa speculatione intuetur. In diuersis autem Figurarum
 formis, quae rerum varietatem eximie referunt, incredibilem concipit voluptatē. Qua-
 rum quae speciem habent cōcinnitatis, rerum vsum et opportunitatem exhibent: quae
 obscuram pra se ferunt compositionem, earum incommoditatem arguunt, & mole-
 stiam. Neq, tamen in Geometria quicquam tam anormae aut inuolutum existit, quod
 ad regulam dirigi non possit, si adsit vis ingenij: Sicut in rerum natura nihil tam diffi-
 cile aut intempestiuum videtur esse, quod non ad vsum conuerti possit, modo non desit
 animi solertia. Omnia quippe aut ad vtilitatem, aut ad pulchritudinem, aut denique
 ad exemplum accommodantur: vt etiam quae ad perniciem generis humani compa-
 rata sunt, bella, venena, morbi, ceteraq, exitiorum genera, cautiore nos efficiant, &
 rerum expetendarum vsus reddant suauiores. Porro, Geometrica positiones, quae ope-
 ras auxiliarias inter se praestant, omnia in rerum natura mutuis alternisq, subsidij
 niti & consistere declarant. Quinetiam amicitiae ipsius iura, in Figurarum similitu-
 dine, quarum colligationem Diameter efficit, conspicua sunt. Ad summam, haec ima-
 go & facies Geometrica eiusmodi est, vt in ea Mundi quandam *θεωπία* possis agno-
 scere. De cuius inijs huc nihil asserre constitui. Non ab Aegyptijs, non à Chaldaeis,
 non à Phœnicibus, illius originem requiram. Scientias quippe aeternas esse semper exi-
 stimavi: atque vt in *N*ate diuina, ab aeterno infixam fuisse *N*undi constitutio-
 nem: sic disciplinas, caelestia quadam semina esse: quae in nobis insita, & pro rata cu-
 iusque portione exculta, fructum edunt. Sed haec fortasse etiam longius à nobis ducta
 sunt, quàm instituti nostri ratio postularet: praesertim quum haec ipsa in Commenta-
 rijs nostris sparsim exposuerimus. In rem igitur praesentem veniant oportet, qui Geome-
 triae dignitatem intueri & perpendere cupient. Eam Euclides noster quindecim Libris
 tradidit. Quorum sex illos qui Planorum tractationem continent, à nobis demonstra-
 tos, tuo nomini, Cardinalis amplissime, dicauius: ne hoc quidem rerum tumultu,
 aut temporum conuersione deterriti. Nam & tu in summis grauissimisque occupatio-
 nibus, artium liberalium caussam, patrociniumq, singulari studio semel susce-
 ptum, nunquam deseruisti. Nostros autem labores si benignè & gratè,
 vt confidimus, exceperis: magnam nobis, etiam sponte curren-
 tibus, alacritatem dederis: vt eadem illa tui nominis
 nuncupatione, totus Euclides quàm poterit
 cultissimus, versetur inter ma-
 nus hominum.

✱



IACOBI PELETARII
CENOMANI IN EVCLIDIS
ELEMENTA GEOMETRICA
DEMONSTRATIONVM
LIBER PRIMVS.



Principiorum explicatio.



PRINCIPIA, sunt quorum nulla est causa. Ipsi enim, quatenus Principia sunt, nihil est prius. Atque ob id in disciplinis tanquam per se nota ponuntur: neque probationem recipiunt, sed probationum sunt fundamenta. Horum in Geometria triplex genus: Definitiones, Postulata seu Petitiones, & animi Notiones. Definitiones quidem naturali insitaq; intelligentia non statim concipimus: sed in eas, quum proponuntur, sponte consentimus: sic dictante rei cuiusq; natura. Quapropter à nonnullis Hypotheses dictæ sunt. Petitiones verò, quanuis prima specie non animaduertantur, tamen auditæ faciliè conceduntur, sic dictante ratione. Atque hæ, vt plurimum, ad Definitiones consequuntur. Sed animi Notiones in quoscunque etiam rudissimos cadunt. Qui igitur Definitiones & Postulata subterfugit, is doctrinæ non est capax. Nemo enim ad disceptationem de re aliqua ritè accedit, nisi prius conueniat quid sit id de quo sit disceptandum, atque in id consentiat quod ex concessis pender. Sed qui Notiones non recipit, etiam sensu communi caret: vnde & animi sensa vocantur. Quur ergo Definitiones, quæ interim subobscuræ sunt, Notionibus præponuntur ab Euclide? Nimirum, quia licet Definitiones non adeò claræ sint: res tamen quæ definiuntur, sese omnium primas obiiiciunt: ob idq;

primas cognoscere cupimus, vt appareat Disciplinæ materia.

Quum igitur in Geometricis animi Notiones, Quantitates respiciant: ideo Quantitates earumq; species definisse oportuit, vt esset in quo notione animi exerceremus. Horum itaque ordo sic habet.



DEFINITIONES.

I



Punctum, est quod partes non habet.

Geometria Magnitudines considerat, easq; finitas. Sed quia Magnitudinum partes, naturam totius denominationemq; retinent, partes enim Linearum, lineæ sunt: Superficium, superficies: & Corporum, corpora: alioqui vaga & confusa esset rerum substantia: Geometria ubique infinitum deuitans (infiniti enim nulla est scientia), ab eo initium sumit, quo simplicius cogitari nihil possit: id verò Punctum vocamus. Nam quum in rebus externis aliquid sensui obiceretur minimum: sanè rationabile fuit, intellectui quoque aliquid dari quo nihil esset minus. Punctum igitur in Geometria, propemodum est quod in Arithmetice Vnitas. Nam sicut Vnitas est Numerorum veluti supposita materia & origo, quæ Numerus non est: ita Punctum, Magnitudinis, quum magnitudo non sit. Illud autem habet mirabile, quod quum diuisionem non admittat, est tamen cum in rebus omnibus, tum in Geometria maxime momentaneum: Nihil enim ferè in vniuersa rerum conquisitione aliud spectamus quam Punctum. Circuli centrum omnium primum quærimus: Quantitates Punctis terminamus, metimur, & diuidimus: vt Punctum assequi, nihil aliud sit quam scopum attingere.

Plato Punctorum hypostasim seu subsistentiam vocat adamantinam: nempe æternam, stabilem, incorruptibilem, quæq; eodem semper modo habeat: Vniuersum circa ipsa conuerti, ac circumquaque in plausum moueri. Eæ sunt Epicuri Atomi, omnium rerum semina.

Ab negatione autem definit Euclides Punctum, quod ad simplicissimum deuenire non possumus, nisi siquid intelligamus quod magnum non sit: quippe neque longum, neque latum, neque crassum.

Punctum autem nonnulli à Signo sic distinguunt, vt Punctum dicant esse quod in medio est Figuræ: Signum verò, quod in termino, aut alibi quam in medio. Sed nos hac curiositate contempta, vtrunque sine discrimine vnum & idem esse ponimus. Ex Puncti fluxu perpetuo in longum, gigni intelligitur Linea: Quæ sic definitur,

2 **Linea, est longitudo latitudinis expers.**

Magnitudinum prima est Linea: cui ex iis tribus quæ Puncto negatur, vnum inest: nempe longum. Hic enim sub latitudine crassities auditur: quum crassum sine latitudine non sit.

Non igitur sicut ex accumulatis Vnitatibus fit Numerus, sic ex additis Punctis fit Linea: sed ex ipsorum fluxu continuo. Atque in hoc differt Continuum à Discreto, quod Continuum infinite diuidatur: neque ad Punctum vnquam deueniatur, vt in Discretis ad Vnitatem.

3 **Lineæ autem limites, sunt puncta.**

A Puncto Linea oritur, & in idem definit. Sed hoc loco dubitatur quonam modo Puncta Lineæ sint limites, quum Circuli peripheria nullos terminos videatur habere. Sanè Puncta eius Lineæ limites dicuntur esse, quæ terminata est. Peripheriam verò, quatenus extrema non habet, Puncta non terminant. Extrema autem si ponuntur, ea nisi Punctis designari non possunt: aut saltem puncto vno, quod duorum vicem supplebit.

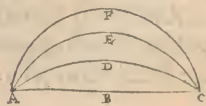
4 **Linea Recta, est quæ ex æquali sua interioret puncta.**

Hæc generalis est definitio Lineæ rectæ: quæ etiam Lineæ ambientis, hoc est, quæ

Circ

Circulum claudit, tribui potest. Hanc enim Plato rectam quoque esse voluit: reliquas verò ex his duabus mixtas, obliquas vocauit. Quod nos ad decimam quintam Propositionem Libri Tertij probabilius ostendemus. Circulo enim nihil equalius neque concinnius. Vbiq; tamen Euclides Rectum à Rotundo seu Peripheria distinguit: quod & nos obseruabimus, disciplinæ causâ.

Igitur Linea Recta, est à puncto ad punctum via breuissima: seu, vt Archimedes, minima linearum quæ eisdem habent limites. Vt à puncto A ad punctum C, ducitur vnica linea recta ABC. Sed peripheriæ, quales ADC & AEC, infinitè duci possunt.



Ac quemadmodum ex Puncti fluxu in continuum, exit Linea: ita ex Lineæ in transversum ductu, oritur Superficies: Quæ sic definitur.

5 Superficies, est quæ longitudinem & latitudinem tantum habet.

Superficieci vnum ex tribus abnegatur quæ Solido insunt, nempe crassum seu profundum. Hanc quidam definirunt terminum esse Corporis.

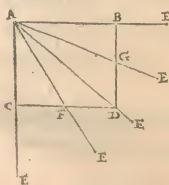
Ac tametsi, Punctum, Linea, & Superficies intellectu tantum capi videantur, non re existere, neque ostendi posse: habet tamen vnumquodque horum in rerum natura quo representetur. Puncta enim corpusculis insecabilibus assimilantur, quæ in radijs Solis collidunt: Lineæ radijs ipsis: Superficies vmbri, vt quæ terram nunquam subeant: seu etiam coloribus, ex Pythagoreorum sententia. Puncta igitur, atomi sunt: Lineæ materia: Superficies forma. Atque ex his Corpus, quod longum, latum, & crassum est.

6 Superficieci extrema, sunt Lineæ.

Hoc loco dubium mouetur simile quod & in terminis ipsius Lineæ: quæ Lineas Superficieci extrema esse dicat Euclides. Nam superficieci Sphæricæ vnica linea terminus est. Verum qui superiorem explicationem acceperit, is etiam in hac facile conquiescet. Superficies enim rotunda quomodocunque diuidatur: (ea autem diuisio fit officio Diametri, aut lineæ cuiusvis abscedentis) ipsius limites erunt Lineæ. Eadem erit & terminorum Corporis, quæ Superficies sunt, ratio.

7 Plana Superficies, est quæ ex æquali suas interiacet lineas.

Conuenit hæc Planæ Superficieci Definitio cum Rectæ Lineæ definitione. Quum itaq; recta linea Superficieci ex æquo incumbit, nempe quum omni variè accommodatur loco, ea est Superficies Plana. Vt, si in Superficie ABCD, linea AE super puncto A fixo sic circumducta fuerit per puncta C, F, D, G, vt ipsi Superficieci æqualiter incumbat, eamq; sic radat, vt punctum nullum emineat, donec ipsa peruenerit ad AB lineam.



A plana igitur Superficie sic excluditur sphærica, seu rotunda, vt à recta linea excluditur Peripheria.

8 Planus Angulus, est duarum linearum in plano sese tangentium alterius ad alteram inclinatio.

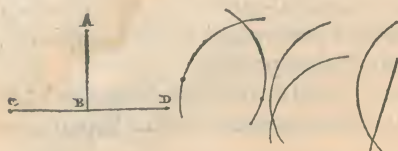
Hæc Anguli definitio antiquorum est, peruulgata: quam nos ad Decimam quintam Propositionem Tertij apertius declarabimus. Habet enim sensum tolerabilem & perspicuum, donec illuc ventum erit. Nos interim tamen Angulum Planum simpliciter sic definimus,

a 2 Ang

Angulus Planus, est duarum linearum in plano sectio.

Cessante enim sectione, cessat Angulus : vt illic probabimus.

- 9 Quando autem quæ angulum continet rectæ fuerint
lineæ: Rectilineus Angulus vocatur.



Vt, si recta A B secet rectam C D: fiunt anguli A B C & A B D, Rectilinei. Cæteri autem Curuilinei quidem dicuntur, quum à duabus curuis fiunt: Mixti verò, quum à recta & curua.

- 10 Quum recta linea super rectam consistens lineam angulos utrinque æquales fecerit: rectus est vterque angulorum. Et quæ sic cadit linea, perpendicularis est ei super quam steterit.

Angulus Rectus à quibusdam definitur esse, qui sibi adjacentem angulum ab eadem linea factum, æqualem habet. Nos verò, vt etiam Quaternarium honoremus, Angulum Rectum esse dicemus, quartam partem sectionis duarum linearum rectorum. Quum igitur linea lineam secans in neutram partem inclinatur, fit angulus Rectus.

- 11 Obtusus angulus, est Recto maior:

- 12 Acutus verò Recto minor.

In centro Circuli à quo semidiametri excunt, tres Angulorum Rectilineorum species expressæ sunt & conspicuæ. In Circulo enim A B C D, cuius centrum E, duæ semidiametri E C & E D in continuum ductæ, vnicam lineam C D Diametrum efficiunt: super quam stans semidiameter E A, diuidensq; Semicirculum C A D & totam C D Diametrum per æqualia, facit duos angulos A E C & A E D æquales: atque ob id rectos. Sed B E in eandem C D cadens, & Semicirculum inæqualiter secans, facit angulum B E D obtusum, vtpote recto maiorem, maioriq; peripheria comprehensum: Angulos autem A E B & B E C, acutos: quia recto minores, & sub minori ambitu contentos.

Neque quisquam miretur, quòd huc Circulum inducamus ante Circuli definitionem. Est enim Circulus Figurarum prima & vltima: omnia probans, & ad omnes ostensiones accommoda: vt nos in Demonstrationibus sparsim dicemus. Sed & ipse Angulorum præcipuus index: Nam ex peripheriæ portionibus, illorum quantitas sumitur, vt modò exhibuimus.

Ex hac igitur Recti & non recti positione, status conditioq; rerum conspicitur. Vnica est enim Recti constitutio: Obtusi & Acuti, infinitæ. Scilicet rectè faciendi vnica est ratio, & ad verum via vna: in diuersum, innumerabiles.

QVÆSITVM est à nonnullis, esset ne Angulus quantitas an qualitas. Nam Angulum, vt æqualis aut inæqualis dicitur, quantitatem esse volunt: vt autem rectus, obtusus, aut acutus est, qualitatem. Ego verò omnino Angulum vt quantitatem attendi debere puto. Nam etiam quatenus rectus, obtusus, aut acutus est, ipsius sola dimensio consideratur: quod & trium specierum definitiones declarant, quæ ab æquali, maiori aut minori petuntur. Extra hæc, sese exercent in Prædicamenti conquisitio- nem, qui volunt. Hûc enim Dialectica & Physica non pertinent.

AT LONGE maior difficultas est in ipsius Anguli forma & constitutione, cuius-

iusm

iustmodi sit & in quo consistat. Nam quod nonnulli dixerunt, Angulum partem esse Superficiæ: id probabile non est. Nam sic ex Angulo Triangulum fieret, ducta tertia linea: quod minimè conuenit. Alij in Puncto, & in Linea, & in Superficie simul esse volunt. Sed hoc rursus maiorem disquisitionem parit. Quota enim ipsius pars in Puncto erit? quota in Linea? quota denique in Superficie? At si hoc quoque abest à veritate, quis erit Anguli situs? Nam si in Puncto tantum consistere dicatur: aut erunt omnes Anguli æquales, aut Punctorum inæqualitas erit ponenda: quorum illud apertè repugnat veritati, hoc rationi minimè consentire videtur. Nihilo magis in Linea aut Superficie sola esse dicitur.

Huic igitur dubitationi, meo iudicio, sic occurrendum, Angulum quidem in vno puncto consistere: sed inclinationem esse quæ maiorem ipsum aut minorem efficit. Linea quidem lineam secans Angulum constituit: sed non propterea Angulus pars est Lineæ: sicut nec Lineæ ipsæ sunt Superficiæ partes, quauis sine Lineis Superficies esse non possit quæ ipsam terminet. Neque igitur Angulus pars erit Superficiæ, quod ipsam occludat. In quo sanè intueri licet, punctum ipsum sectionis, à linea secante premi & quodammodo angustius fieri, pro inclinationis modo. Punctum ergo erit quantitas: minimè. Intellectus enim quod semel minutissimum receperit, id amplius non diuidit: sed contrahere tamen & constringere nihil vetat. Ac nequis nos repugnantia dicere putet, is attendat in Geometria Punctum non considerari vt nihil: immò vt aliquid. Et vt in Arithmetice Vnitatem minuimus, sic & Punctum suo modo in Continuis: scilicet vt id ex quo omnia emergunt, omnium etiam representationem imaginemque exhibeat: nempe recti, obliqui, longi, lati, & profundi. Quum igitur Geometria Naturam vbique referat, vt est ipsius speculum: cogitemus, sicut in angulo physico duæ lineæ quantunlibet tenues se mutuo non possunt scindere, nisi altera alteri cedat in puncto decussationis: ita in linearum Mathematicarum sectione recta, Punctum quodammodo esse quadratum: in obtusa, hebetius: in acuta, pressius & angustius. Atque hæc intellectus assequitur: qui nisi cum natura nunquam conquiescit. Vnde Puncti imminuendi finem non facit: donec linea cadens cum iacente vna facta sit. Quum itaque Punctum diuisionis expers esse intellectus ponit: id concipit, vt neque Linea, neque Superficies, neque Corpus sit. Sed quum ad Angulum deuenit, qui aliam omnino habet considerationem à cæteris quantitatibus: tunc quod sine partibus receperat, id iam minuendum assumit: scilicet, vt, quod paulò antè diximus, id ex quo quantitas nascitur, naturam etiam quantitatis sapiat. Atque hæc nostra est de Anguli constitutione sententia. Diu enim nos exercuit hæc Puncti variatio: quam à nemine obseruatam inuenimus: & si modò obseruata sit, hætenus dissimulata est. Impedita enim res est in disciplinis ea, quæ quum apparet, demonstrationem non recipit. Quod si quis hac in re habebit quod probabilius sentiat, huic libenter concedemus. Nihil enim inuestigandum nobis proponimus præter veritatem.

13 Terminus, est quod cuiusque finis est.

Quia Puncta, Linearum: Lineæ, Superficierum: Superficies, Corporum sunt termini: moxque Figuram terminatam esse ponit: quid Terminus esset definire voluit: nempe vniuscuiusque rei finis.

14 Figura, est quæ sub aliquo vel aliquibus terminis continetur.

Circulus vno termino, nempe vna linea continetur, vt mox dicemus: sicut & Corpus sphericum vnica superficie. Reliquæ autem figuræ, pluribus terminis: vt Triangulum, Quadrilaterum, ac deinceps planæ Figuræ: Prisma item, Cubus, Columna, Pyramis, & quæ sunt reliquæ solidarum.

SED VIDEBITUR fortassè caipiam Euclides aliter hinc sentire quàm suprâ

a 3 senser

senferit in Superficie. Eā enim dixit lineis, nō vnica linea terminari. Verūm aliter consideratur Circulus, vt Circulus est: & aliter vt Superficies. Si enim diuidatur Circulus: ipsius pars nulla Circulus erit: Superficiē verò partes, Superficies sunt. Huius itaque Definitionis sensum sic collige: vt Circulus, quatenus forma rotunda est, vnica linea contineri possit: sed quatenus Superficies, pluribus: vt illū docuimus.

Vel omnino rectius intelligemus Superficiem linea vel lineis terminari.

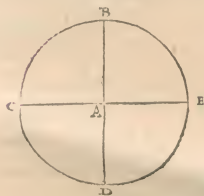
15 Circulus, est Figura plana, vna linea contenta quæ Peripheria appellatur: ad quam ab vno puncto introrsum existente omnes porrectæ lineæ sunt æquales.

16 Punctum autem illud, Centrum Circuli vocatur.

Hæc Circuli definitio notissima est: quæ ipsius affectionem, seu, vt dicunt, passionem explicat. Siquis verò factionem seu creationem Circuli sibi exponi petat, instar Definitionis Sphæræ quam Euclides libro vndecimo daturus est: ea erit huiusmodi.

Circulus, est vestigium lineæ rectæ in plano circumductæ, altero extremorum manente fixo, donec ipsa vnde duci cæpit, redierit.

Vt, si linea AB super A puncto duci incipiat in orbem à puncto B, per C, D, & E puncta, donec ipsa rursus AB facta sit: descriptus erit Circulus BCDE. Atque ex hac descriptione, graphicè exprimitur tota Circuli proprietas. Punctum enim illud fixum A, Centrum dicitur: vestigium verò à puncto B mobili circumscriptum, Peripheria. Tota demum linea AB circumducta, Superficiem describit quæ Circulus dicitur. Vnde manifestum est omnes lineas à centro Circuli exeuntes, æquales esse: quum sint ex vnus lineæ vestigio.



NEQVE EST quòd quisquam se fatiget inquirendo, vtrum sit prius Rectum an Rotundum. Sed si quis sententiam ferre cogatur: vt Philosophus, rectè iudicabit, si vtrunq; simul esse pronuntiauerit. Nam & Circulus in plano rotatus, Rectum procreat. Menti quippè nihil prius neque posterius. Immo puncta ante lineas: aut lineas ante Superficies: aut denique superficies ante corpora fuisse, vix cogitatio ipsa complecti potest. Sicut apud Philosophos, Vniuersum aliquando non fuisse, captum animorum excedit: semper fuisse, supra omnem admirationem est. Nos autem, quantum cogitatione assequimur, omnia suo ordine statuere, atq; ad artem reducere: conamur iudicio quoad eius fieri potest, probabili, minimeq; fallaci. Ordo enim in Disciplinis dux certissimus. Sed nos hæc rerum varietas exercet: in qua satis nobis est coniecturam ad vsum accommodare. Quid enim nos efficere posse putamus arte, in ijs quæ Natura tam affabrè fecit? aut quid ingenio consequi, quum de his quæ diuinitus emanarūt, humanitūs iudicamus. Circulus igitur ex se ipse ortus, ex Recto provenire videtur: infinitus, ac finito similis: omnia continens, vt capacissimus, & tamen aliquid extrà se in speciem admittens. Sed nos in hanc rem aliàs vberius, Deo iuvante, philosophabimur.

17 Diameter Circuli, est linea recta per centrum acta, quæ vtrinque ad peripheriam terminata Circulum bifariam diuidit.

Quum linea AB in figura modò inducta, peruenit ad punctum D oppositum: fit vna linea BAD: quæ Diameter est Circuli, ipsumq; bipartitò diuidit. Quod Thales Milesius, qui Geometriam ab Ægypto in Græciam aduexit, primus animaduertit

tit & probauit. Nam si linea per centrum acta, Circulum non diuidat bifariam: non erunt à centro ad ambitum extensæ lineæ, æquales.

Cæterum Diameter, & Dimetiens Circuli & Quadrati dicitur: immò & Diameter Quadrilaterorum, nulla vocum curiositate: quanuis horum proprius sit Diagonius. Axis autem, Sphæræ & solidorum est: vt Coni, Cylindri, & Piramidis.

18 Semicirculus, est figura quæ sub Dimetiente & ea quæ à toto sublata est peripheria, continetur.

19 Sectio Circuli, est quæ sub recta linea & Circuli peripheria maiore aut minore Semicirculo, continetur.

In Circulo $A B C D E$, vtrius Figurarum $B A F$ & $B D F$, ex linea recta $B F$ per centrum acta, & linea curua, quam subtendit, conflata, Semicirculus dicitur. Sed ex linea $C E$ per centrum non transeunte, & peripheriam diuidente, fiunt duæ Figuræ inæquales: $C A E$, maior Semicirculo: & $C D E$, eodem minor: Atq; harum vtralibet, Sectio Circuli dicitur. Vtraque etiam peripheriarum $C A E$ & $C D F$, Arcus: recta autem $C E$, Chorda vulgò appellatur.

Hæ tamen duæ Definitiones hûc non spectabant, sed ad tertium librum: nisi fortè Principia omnia, vniuerso operi communiter præscribenda dicamus: quæ tamen maluit Euclides in singulos libros distribuere: Atque ob id, hanc posteriorem in tertio libro repetit. Post Circulum, Figuræ Rectilincæ definiuntur.

20 Rectilineæ Figuræ, sunt quæ sub rectis lineis continentur.

21 Trilateræ, sunt quæ sub tribus rectis continentur lineis.

Figurarum Rectilinearum prima est Trilatera. Ex ipsius enim Rectæ lineæ definitione, non possunt duæ lineæ rectæ superficiem constituere: vnde neque figuram. Nam à puncto in punctum vnicus est ductus in rectum. Secunda verò in ordine est Quadrilatera.

22 Quadrilateræ, sunt quæ sub quatuor rectis lineis comprehenduntur.

Quadrilateræ ad demonstrationes Geometricas accommodantur, sicut & Trilateræ, propter simplicitatem: ob idq; inter Principia definiuntur. Quæ verò quaternarium excedunt, obscuriorem habent tractationem.

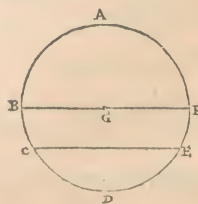
23 Multilateræ sunt quæ sub pluribus quàm quatuor rectis lineis comprehenduntur.

Rectilinearum Figurarum multitudo infinita est: quæ à numero laterum nomen habent. Sed generali vocabulo Multilateræ dicuntur.

24 Inter Trilateras porrò Figuras, Aequilaterū Triangulum, est quod tria habet latera æqualia.

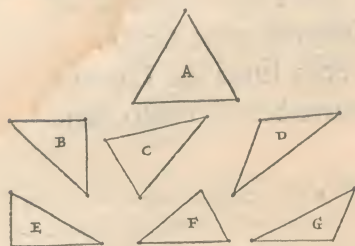
25 Isosceles autem, quod duobus lateribus æqualibus & tertio inæquali constat.

a 4 26 Scalen



26 Scalenum verò, est quod sub tribus inæqualibus lateribus continetur.

His tribus postremis Definitionibus, tres Triangulorum species exponuntur. Harum prima, est *Æquilateri*. Nam quæ omni ex parte æqualitas est, simplicior, & cognitu facilior. Huic proxima est duorum laterum æqualitas, quæ basi inæquali subtenduntur. Atque hoc Triangulum *Isofceles* vocatur. Tertia species est, quæ vnum tantum æquale habet: hoc est, tria inæqualia. *Æquilateralum* vna est constructio: in ipsis enim perpetuò sunt anguli æquales. Sed in *Isofcilibus* & *Scalenis*, anguli infinitis modis variantur.



Æquilaterum est A. *Isofcelia* sunt B, C, & D. *Scalena* E, F, & G Triangula.

27 Ampliùs, *Trilaterarum Figurarum Rectangulum Triangulum*, est quod vnum rectum habet angulum.

28 *Amblygonium*, cuius obtusus est vnus angulorum.

29 *Oxygonium*, quod tribus constat acutis.

Rectangula sunt, B *Isofceles*, & E *Scalenum*: *Amblygonia* seu *Obtusangula* sunt, D *Isofceles*, & G *Scalenum*: *Oxygonia* seu *Acutangula* sunt, A *Æquilaterum*, C *Isofceles*, & F *Scalenum*. *Æquilaterum* perpetuò *Oxygonium* est. Reliquæ species *Rectangulæ*, *Amblygoniæ*, & *Oxygoniæ* esse possunt.

Post *Trilateras* sequitur *Quadrilaterorum* diuisio vniuersa: quarum perfectissima est *Quadrata*.

30 *Quadrilaterarum* autem *figurarum*, *Quadratum*, est quod æquilaterum & rectangulum est.

31 *Altera parte longius*, est quod rectangulum quidem est, sed non æquilaterum.

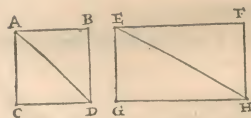
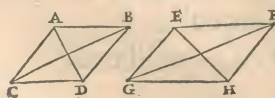


Figura Quadrilatera A B C D, cuius *Diameter* A D, est *Quadrata*: constatq; duobus Triangulis *Isofcilibus* rectangulis, A B D & A C D. At *Figura* E F G H, cuius *Diagonius* E H, est altera parte longior: constatq; duobus *Scalenis* E F H & E G H, *Rectangulis*.

32 *Rhombus*, est *figura quadrilatera æquilatera*, sed non rectangula.

33 *Rhomboides* verò, est quæ ex opposito bina latera æqualia, binosq; angulos æquales habet: sed neque æquilatera, neque æquiangula est.

Rhombus, quatuor habet latera æqualia, duasq; *Diametros* inæquales: vt *Quadrilaterum* A B C D: atque hinc duos angulos æquales oppositos, obtusos: vt B A C &

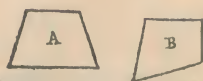


B D C: indè vero duos oppositos æquales, acutos: ut A C D & A B D.

At *Rhomboides* habet bina latera opposita æqualia. Vt in E F G H *Figura*, duo latera E F & G H opposita, inter

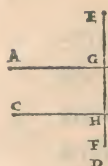
inter se sunt æqualia, duoq; EG & FH inter se. Cæterum in hoc conuenit cum Rhombo, quòd duas Diametros inæquales: binos item angulos oppositos æquales, hinc obtusos, illinc acutos habet.

34 Præter hæc autem reliqua Quadrilatera, Trapezia dicantur.



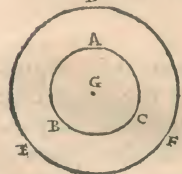
In his nulla est laterum definita æqualitas: sed promiscua constitutio: propter quod anormia sunt. Vt duo A & B Quadrilatera.

35 Paralleli, seu æquidistantes lineæ rectæ, sunt quæ in eodem plano existentes, in vtranque partem productæ neutrobi conueniunt.



Quum Recta linea, rectas lineas secans, ipsis æqualiter superstat, aut in easdem æqualiter inclinatur, vt quum anguli sectionum fuerint mutuo æquales: hæc lineæ secæ, sunt Paralleli, seu Æquidistantes,

Vt si duas lineas AB & CD secet linea EF in punctis G & H : fueritq; angulus AGE æqualis angulo CHG , duæ AB & CD lineæ, erunt paralleli: quia in vtranvis partem protrahantur, nunquam concurrent.



Lineæ autem Circulorum, Paralleli dicuntur, quæ super eodem centro ductæ sunt. Vt duæ lineæ ABC & DEF super eodem centro G , æquidistant inter se.

PETITIONES.

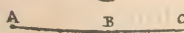
1 Ab omni puncto in omne punctum rectam lineam ducere.

Duo puncta, vbicunque assignentur, in eodem plano esse intelliguntur: atque ob id, ab vno ad alterum via est aliqua breuissima. Quapropter à puncto A ad punctum B nemo negauerit lineam rectam duci posse: sic neque ab A ad C . Et quia eadem ratione B & C in eodem sunt plano: fit vt tria quælibet puncta in eodem semper existant plano. Ex quibus superficies Triangula conflabitur: qualis est ABC . Atque hæc est rerum colligatio. Hic enim binarius ternarius: ternarius quaternarius, immò & senarius includit: quum vnunquodque punctorum vice duorum sit. Quartum autem punctum erit septimum & aduentitium. Atque ideo ad superficiem conflandam, quarto puncto non est opus, quòd Senarius sit numerus perfectus.



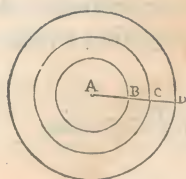
2 Rectam lineam terminatam in continuū rectumq; producere.

Inter Quantitates non datur tam magna, quin maior dari possit: neque tam parua, quin minor. Rectam itaq; AB ad punctum C produci posse nemo nisi indocilis inficiabitur.



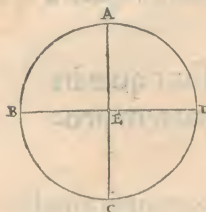
3 Omni

3 Omni centro & interuallo Circulum describere.



Superficies plana in ambitum extendi infinite potest: sicut ab omni puncto in omne punctum recta linea duci: quod fit ut Circulus omni interuallo describi possit concedatur.

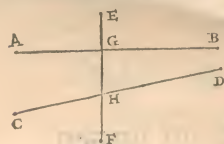
4 Omnes angulos rectos inter se æquales esse.



Hæc constat ex decima Definitione. Rectus enim angulus, fit quum recta linea in rectam lineam ad præpendiculum cadit: hoc est, æqualiter ipsi superstat. Id verò ex Circuli centro euentissimè apparet. Vt ex A B C D, qui duabus Diametris se in E centro secantibus diuiditur in quadrantes, qui quatuor angulos qui ad E, subtendunt æquales, quia rectos.

5 Quum in duas rectas lineas recta linea incidens, interiores & in eadem parte angulos duobus rectis minores fecerit: rectas lineas productas tandem concurrere ad eam partem in qua anguli duobus rectis minores existunt.

Vt si in rectas lineas A B & C D, recta incidens E F, & secans ipsas in punctis G & H, duos angulos interiores B G H & D H G simul sumptos, fecerit duobus rectis minores: ipsæ rectæ lineæ A B & C D concurrent versus duo puncta B & D. Si enim ponatur B G perpendicularis ipsi E F:



Scilicet anguli qui ad G, recti: sit autem D H G minor recto: erit D H inclinata super E F versus E: Atque ob id, angulus D H G minor angulo D H F, ex conuersione Decimæ Definitionis: sicq; minor recto: quoniam si esset æqualis, vterque esset rectus, per eandem Definitionem: cuius contrarium hîc ponimus. Igitur ob inclinationem, ipsa C D producta tandem conueniet cum A B: idq; ob eam causam, quod duo anguli B G H & D H G, duobus rectis sunt minores.

HOC TAMEN Postulatum inter Definitiones reponi poterat. Exponit enim lineas non parallelos, sicut decima Definitio Parallelos. Ad hæc, quum in speciem Theorematis enuntiaretur: nos in Postulatum redeimus.

ANIMI NOTIONES.

- 1 Quæ eidem sunt æqualia, & inter se sunt æqualia.
- 2 Et si æqualibus æqualia addantur, tota erunt æqualia.
- 3 Et si ab æqualibus æqualia auferantur: quæ relinquuntur erunt æqualia.
- 4 Et si inæqualibus æqualia adiiciantur: tota erunt inæqualia.
- 5 Et si ab inæqualibus æqualia auferantur: reliqua erunt inæqualia.

6 Quæ

- 6 Quæ eiusdem duplicia sunt, inter se sunt æqualia.
- 7 Et quæ eiusdem sunt dimidium, inter se sunt æqualia.
- 8 Quæ inter se ipsa conueniunt, & inter se sunt æqualia.
- 9 Totum est sua parte maius.
- 10 Duæ rectæ lineæ Superficiem non concludunt.

Hæc verò Axiomata per se sic manifesta sunt, vt nulla ostensione indigeant. Horum tamen vltimum quidam in ordine Postulatorum posuerunt: neque omnino absque ratione. Nam & Postulati naturam sapit: & ad definitionem Rectæ Linæ consequitur, vt iam antè monuimus. Sed in hoc non insistemus. Vtrobique enim Principij notissimi vim habet.

*De Hypothesi, Demonstratione, Problemate,
& Theoremate.*

★



Hypothesis, quantum huc attinet, est subiectio, seu fundamentum rationationis. Hanc re existere non est necessarium: probabilem esse satis est: eamque legem duntaxat habet, nequid absurdi importet. Ut quum conuenerit Figuram Figuræ esse æqualem, aut maiorem, atque ex hoc deducatur argumentatio: ea æqualitas aut inæqualitas, Hypothesis est: A qua discedere, constante argumentatione, non licet. Demonstrationem verò appellant Dialectici, Syllogismum qui faciat scire: nempe qui ex probatissimis concludat. Atque hæc à Geometria ortum habet. Immò omnis quæ ad verum perducit probatio, Geometrica est. Ut verissimè dictum sit, neminem scire verum à falso distinguere, cui Euclides non fuerit familiaris. Quod si quis attentius sciscitabitur, quur in Demonstrandis Propositionibus non eluceat forma Syllogismi, sed tantum concisa quædam membra Syllogismorum appareant: is sic habeat, præter dignitatem esse, quæ in scholis docentur, ea quum in rem præsentem ventum sit, ex præscriptis formulis obseruare. Neque enim Orator, quum ad forum accedit, quæ à Rhetore excepit dictata, in digitis collocat: immò id agit, ut quum præceptorum maximè meminit, nihil minus quàm Rhetorice cogitare videatur. Sic in opere Geometrico, quum nil aliud spectemus quàm ut scopum exquisitè assequamur: Syllogismi figuram omninò dissimulamus. Quæ tamen si exigatur, è probationibus Geometricis ad viuum exprimitur. Sed nos ea rescamus, quæ repetita non modò tædium, sed etiam obscuritatem parerent. Quod inter Demonstrationes facile perspicient qui iudicio præditi erunt. Demonstrationum autem conclusiones, sunt Problemata & Theoremata.

Problemata, ortus Figurarum comprehendunt, sectiones, additamenta: eaque omnia in arte, quæ facienda proponuntur. Atque, ut in Philosophia, Problemata dicuntur dubia quædam quæ nobis examinanda & soluenda proponimus: sic in Geometricis, Problemata vocamus constructiones ex arte depromptas: à quibus speculationes oriuntur, seu Theoremata: nempe quæ factas Figuras comitantur, proprietates & affectiones: quæque scientiæ ipsi inhærent & ipsam efficiunt. Nam in assertionem consistunt præceptorum sicut Problemata in constitutione Figurarum. Ad summam, Problemata materiam quandam praxinque artis referunt: Theoremata, formam, scientiæque meditationem. Ex utrisque Euclides Elementa Geometrica contexuit, ut operi vicissim subserviebant, ordine quidem concinniori quàm ante illum quisquam: licet neque Archimedes, neque Ptolemæus, neque vllus antiquorum se ordini astrinxerit: nimirum quòd institutiones Geometricæ tam integræ dari vix possint, quin aliquid desiderari, aut supereffe, aut conuenientiore collocationem exigere videatur. Geometria enim perpetuam meditationis materiam alit. Sed hæc in aliud tempus reponimus. Nunc Euclidem ex professo ducem sequemur.

PROBL

PROBLEMA PRIMVM,
PROPOSITIO PRIMA.

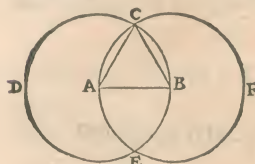


Vper data recta linea, Triangulum æquilate-
rum constituere.

Triangulum, aut aliam quavis Figuram super data linea consti-
tuere, est ex ipsa linea vnum latus Figuræ facere.

Sit data linea, AB . Volo super AB constituere Triangulum
æquilaterum.

Centro quidem A , spatio verò AB , describo Circulum $BCDE$, per ter-
tiam Petitionem: Rursusq; centro B , & eodem spatio BA , describo alterum
Circulum $A EFC$. Atque hi duo Circuli se mutuò secabunt in duobus punctis,
vt in E & C : quum vtriusque communis sit Semidia-
meter AB . A duobus igitur terminis A & B , ad alteram
interfectionum, vt ad C , ducò AC & BC lineas, per
primam Petitionem. Dico iam ABC Triangulum super
 AB linea constitutum, esse æquilaterum.



Quoniam enim AB & AC exeunt à centro A ad
peripheriam $BCDE$: erit per Centri & Circuli definitionem, AC ipsi AB æqua-
lis. Rursus, quoniam BA & BC exeunt à centro B ad peripheriam $A EFC$:
erit, per eandem Definitionem, BC eidem BA æqualis. Dux igitur AC & BC
vni AB sunt æquales: ob idq; per primam animi Notionem, tres AB , AC , & BC
inter se sunt æquales. Quare ABC Triangulum super AB linea constitutum, est
æquilaterum, Quod faciendum fuit.

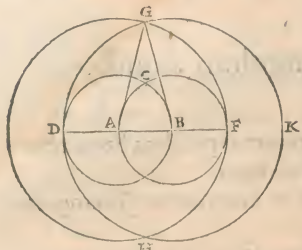
PVLCHRE Euclides primam ac simplicissimam Figurarum cum vltima & capa-
cissima coniunxit: scilicet Triangulum cum Circulo. Vtriusq; enim vsus immensus:
Trianguli, ob simplicitatem: Circuli ob perfectionem. Æquilateri verò duntaxat
meminit, quòd hæc Trianguli species eadem semper sit & vniufmodi, ob laterum &
angulorum æqualitatem: Reliquas duas species prætermisit, Isosceles & Scalenum.
Infinite enim eorum figuræ.

Id vnum tamen non omitam, Trianguli Isoscelis longè maximum esse vsum.
Nam quum in Geometricis omnia ferè æqualitate & recto probentur, duorum au-
tem æqualitas satis sit ad tertium quippiam demonstrandum: quæcunque Demon-
strationes fiunt Trianguli Æquilateri adminiculo, eæ quoq; per Isosceles absoluun-
tur: Isosceli verò rectus angulus inesse potest, Æquilatero nunquam. Quumq; Trian-
gula nil aliud sint quàm dimidiæ partes Quadrilaterorum: Isosceles, dimidium erit
Quadrati, Æquilaterum verò minimè, sed solius Rhombi. Æquilaterum quidem
hoc habet privilegij, quòd tres ipsius anguli perpetuò sint æquales: Isoscelis nun-
quam, sed duo tantum. Tres item anguli cuiuslibet Æquilateri, tribus semper alte-
rius Æquilateri singulatim æquales, quavis singula vnus latera, singulis alterius la-
teribus sint inæqualia. Sed hæc ad demonstrationes parum conferunt. Præcipuus
igitur Æquilateri vsus, est in solidis: sed in superficiebus ferè nullus, nisi fortè ad Fi-
guras Circulo inscribendas, vbi etiamnum vt Isosceles consideratur. Hac nos ratione
inducti, Appendicem Campani nō omisimus, quatenus Isosceles Triangulum super
data linea collocandum proponit. Scaleni verò positionem, vt inutilem negleximus.

Super data recta linea, Triangulum Isosceles constituere.

Manente eadem Æquilateri descriptione, protrahatur linea AB data, donec
vtrinque pertingat peripherias Circulorum in punctis D & F . Tum centro A , spa-
tio AB

tio verò $A F$, describatur Circulus $F G H$: rursusq; centro B , spatio verò $B D$, describatur alter Circulus $D G K$: quorum vterque alterum secabit in duobus punctis, vt in G & H . non secus quàm in superiori descriptione. A punctis itaque A & G duco lineas $A G$ & $B G$. Dico Triangulum $A B G$ super $A B$ linea constitutum, esse *Isoceles*.

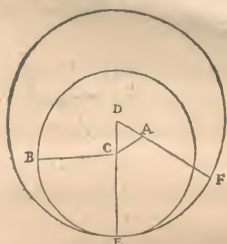


Quum enim $A B$ & $A D$ lineæ sint æquales, nempe vtraque à centro ad peripheriam: eademq; ratione, $B A$ & $B F$ æquales: erunt duæ $A D$ & $B F$ inter se æquales, per primam animi Notionem. Quapropter, addita communi $A B$, erunt per secundam Notionem, $A F$ & $B D$ æquales. Sed $A G$ ipsi $A F$ æqualis, vtraque enim à centro ad peripheriam: quapropter & eadem $A G$ ipsi $B D$ æqualis. Atqui $B G$ ipsi $B D$ est æqualis, ex ipsa Centri & Circuli definitione. Duæ igitur $A G$ & $B G$ vni $B D$ sunt æquales: ob idq; inter se æquales, per primam animi Notionem. Quare, quum vtraque maior sit quàm $A B$ (maior enim est $B D$ quàm $A B$): erit Triangulum $A B G$ *Isoceles*, Quod erat faciendum.

PROBLEMA 2, PROPOSITIO II.

Ad datum punctum, datæ rectæ lineæ æquam rectam lineam ducere.

Sit datum punctum A , data verò linea recta $B C$. Volo ad A punctum, ipsi $B C$ rectæ lineæ æqualem lineam ducere. Alterum terminorum ipsius $B C$ connecto cum puncto A : scilicet terminum C , ducta, per primam Petitionem, recta linea $C A$. Tum centro C , interuallo verò $C B$, describo Circulum $B E B$, per tertiam Petitionem. Cuius peripheria si transeat per punctum A , habeo quod volui: Erit enim per Centri definitionem, $C A$ ipsi $C B$ æqualis. Sin aliorum transeat: constituam super $C A$, Triangulum æquilaterum $A C D$,



per primam Propositionem, (scu *Isoceles*, per ea quæ illic addidimus, nihil enim refert, modò $A D$ & $C D$ latera ipsius sint æqualia): Cuius latus $D C$ protraham ad punctum E peripheriæ. Tum centro D , interuallo autem $D E$ describam alterum Circulum $E F E$: & ad punctum F ipsius Peripheriæ protraham latus $D A$. Dico $A F$ esse ipsi $B C$ æqualem.

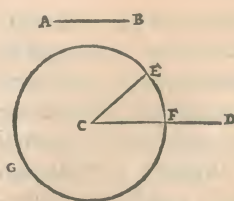
Duæ enim $C B$ & $C E$ sunt æquales: quum sit vtraque à centro ad peripheriam. Duæ item $D E$ & $D F$, eadem ratione æquales. Sed $D C$ & $D A$ æquales, ex constructione: quum sint latera Trianguli *Æquilateri*: aut *Isoceles* si placet. Si itaque auferantur $D C$ & $D A$ æquales, ex $D E$ & $D F$ æqualibus: remanebunt, per tertiam animi Notionem, $C E$ & $A F$ æquales. At $B C$ ipsi $C E$ ostensa est æqualis. Duæ igitur $B C$ & $A F$ ipsi $C E$ æquales: ob idq; & inuicem æquales, per primam animi Notionem. Quare ad punctum A , ducta est $F A$ ipsi $B C$ æqualis, Quod erat faciendum.

PROBLEMA 3, PROPOSITIO III.

Datis duabus rectis lineis inæqualibus, à maiori lineam minori æqualem abscindere.

Sint duæ lineæ $A B$ & $C D$ inæquales, quarum minor $A B$. Volo ex $C D$ abscindere partem ipsi $A B$ æqualem.

Ad



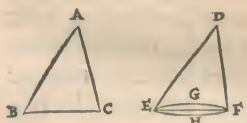
Ad punctum c duco ec ipsi ab æqualem, per secundam Propositionem. Ac centro c , intervallo verò ce , describo Circulum efg : qui secabit maiorem cd in aliquo puncto: & secet in f . Dico cf esse æqualem ab .

Est enim ipsa æqualis lineæ ce . Sed & ab eidem ce æqualis. Quare, per primam Notionem, cf æqualis ab , Quod erat faciendum.

THEOREMA I, PROPOSITIO IIII.

Si duo Triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint alterum alteri, & angulos binis æquis lateribus contentos æquales: basis quoque basi æqualis erit, ac reliqui anguli æquis lateribus contenti mutuo æquales: totum denique Triangulum toti Triangulo æquale.

Sint duo Triangula abc & def , quorum vnus duo latera, sint æqualia duobus lateribus alterius: scilicet latus ab æquale lateri de : & latus ac lateri df : sitq; angulus a æqualis angulo d . Dico basin bc basi ef esse æqualem: Angulum item b angulo e , & angulum c angulo f : ac totum Triangulum toti Triangulo æquale.

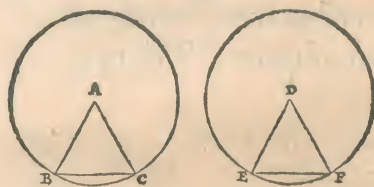


Superponam Triangulum abc , Triangulo def : vt angulus a cadat super angulum d , latusq; ab super latus de , & ac super df . Eritq; per octauam animi Notionem, vt nec anguli nec latera sese excedant. Cadent nanque duo puncta b & c super duo e & f . Sicq; linea bc super lineam ef cadens, erit ipsi æqualis: atque ea ratione angulus b æqualis angulo e , & angulus c angulo f : & totum Triangulum toti Triangulo æquale: quum inter se sic conueniant. Nam si non congruat linea bc cum linea ef , congruentibus punctis b & c ipsis e & f punctis: sed cadat intra Triangulum, vt linea ecf : aut extra, vt linea ehf : duæ lineæ claudent superficiem, contra vltimam animi Notionem. Quare duo Triangula abc & def omni ex parte inter se æqualia, Quod fuit demonstrandum.

HÆC EST vulgata omnium Interpretum Demonstratio, si modò hæc Demonstratio dici debeat. Nam si linearum figurarumq; superpositiones in probationem recipiamus, tota ferè Geometria huiusmodi applicationibus erit referta: vixq; vlla occurret Propositio, quæ hac ratione non possit probari. Secunda enim iam inde ac tertia, quas modò demonstrauius, sic probari poterant. Nam si ad datum punctum, linea datæ lineæ æqualis ducenda sit: illicò translata linea ad ipsum punctum, absolutum erit negotium: Applicatio verò quauis superpositione sit tolerabilior, tamen in Geometria repudiatur: immò ne lineam quidem transportare licet, vt secundum ipsius magnitudinem, Circulum describamus: quin prius æqualis linea ducta sit. Alioqui secunda prorsus vacaret. Tum si à maiori linea, minor sit abscindenda: quid aliud quàm maiori minorem superponemus, vt quod superat rescemus? Sed hoc quàm sit à Geometriæ dignitate alienum, eorum iudicio relinquo qui Demonstrationis vim & energiam animo concipiunt. Quid ergo huc afferemus, vt Euclidem à reprehensione vindicemus? Neque enim ex tam paucis quas hæcenus præmisist, Propositionibus, hoc Theorema confirmari posse videtur. Huic obiectioni, meo iudicio, sic occurrere poterit: vt dicamus, hoc Theorema per se clarum esse, neque probatione egere: sed Definitionis cuiusdam loco habendum

b 2 esse.

esse. Nam quum de re aliqua sermonem instituimus: ea nobis tacite per definitionem subit in animum: Non enim duos angulos æquales esse cogitabo, nisi quid sit æquales esse angulos concipiam. Quod respiciens Euclides, angulorum æqualitatem proponere, atque eadem opera definire voluit: ut hoc Theorema pro Definitione haberemus. Nemo enim significantius explicabit angulorum æqualitatem, quàm si dixerit duos angulos æquales fieri, quum duo latera vnum angulum continentia, duobus alterum angulum continentibus sunt æqualia, & bases quæ latera connectunt, æquales. Constat enim angulum tantum esse, quanta est duarum linearum ipsum continentium apertio, seu diductio, hanc verò tantam esse, quanta est basis, hoc est, linea ipsas connectens. Atque ut clarè dicam, tantus est angulus BAC , quanta est remotio lineæ AC ab ipsa AB : tanta verò efficitur remotio, quantam exhibet linea BC . Hoc autem in Isoscelibus est evidentiùs. Sint enim duo Isoscelia ABC & DEF : quorum vnus duo latera AB & AC duobus DE & DF alterius sint æqualia: angulusq; A angulo D . Ac positis centris in A & D punctis, ducantur duo Circuli: prior secundum AB , alter secundum DE spatium. Horum prior manifestò transibit per B & C : alter verò per E & F puncta: quum AB & AC , itemq; DE & EF sint æqualia, & à centro vtrinque exeuntia. Atque, ex definitione æqualium angulorum, erunt arcus BC & EF æquales. Angulorum enim magnitudo designatur ex arcibus Circulorum qui per extremas lineas quæ angulos continet, transeunt. Ac conuerso modo, æquales anguli atque æqualibus lineis comprehensi, æquales subtendunt peripherias. Quum enim æqualia sint spatia BC & EF , ea æqualibus rectis lineis claudi oportet: propterea quòd recta linea, est à puncto ad punctum via breuissima. Atque haud dissimili iudicio, ex laterum ratione & basium, quanta sit angulorum magnitudo æstimabimus. Quir ergo Euclides hoc inter Theoremata reposuit, non inter Principia præmisit: Nimirum, quum speciem quodammodo mixtam Principij & Theorematis præ se ferret: Principij, quòd in communi animi iudicio consisteret: Theorematis, quòd speciatim Triangula Triangulis comparanda proponeret: maluit Euclides inter Theoremata referre: præsertim quum multa haberet capita, Principium verò simplex ac velut nudum esse debeat. Ex hoc præterea Axiomate tanquam ex locupletissimo Demonstrationum themate, multæ Propositiones consequi debebant, eiusdem propè facilitatis & iudicij: quas, quia erant notissimæ, inter Principia annumerari non conueniebat. Paucis enim Principijs Geometriam contentam esse oportebat: immò multa Principia consultò supprimuntur, ne sit onerosa multitudo: ut etiam quæ exprimuntur, tantum ad exemplum exprimi videantur. Huc accedit, quòd primum Theorema facile, perspicuum, ac sensui obuium esse debebat, pro Geometriæ lege, quæ ex paruis humilibusq; initijs, in progressus mirabiles sese extollit.

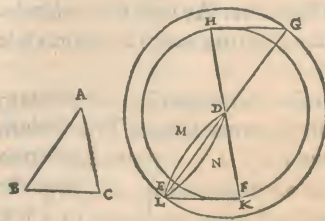


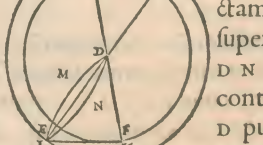
Huius itaque Propositionis veritatem non aliunde quàm à communi iudicio petemus: cogitabimusq; Figuras Figuris superponere, Mechanicum quippiam esse: intelligere verò, id demum esse Mathematicum. Iam verò quum fuerit confessum duo Triangula inuicem esse æquilatera, ipsa quoque inter se æqualia fateri erit necessarium. Etenim nulla euidentiori specie æqualitas Figurarum dignoscitur, quàm ex laterum æqualitate: quanquam Circulorum æqualitas ex diametris definitur: sed non aliam ob causam, quàm quòd linea obliqua sui copiam adeò apertè non facit ut recta: Cuius mensuram facillè capimus, ac per eam, obliquarum inter se comparisonem facimus.

At si hæc superpositio aliqua ratione admittenda sit: tolerabilior sanè fuerit hoc qui sequitur modo.

Manente duorum Triangulorum ABC & DEF conditione, continuabo ED vsque

vsque ad G punctum, per primam Petitionem: & ponam DG æqualem AB, per secundam Propositionem. Atque itidem continuata FD, ponam DH æqualem AC. Tum super puncto D, ducam duos Circulos: alterum spatio DG, alterum spatio DH. Quorum prior manifestò transit per punctum E, quum sint DE &




 D G æquales : alter verò per punctum F, ob
 eandem rationem. Iam à puncto D ducò lineam re-
 ctam D L ad E punctum : quæ omninò transibit
 super D E. Nam si extrà transeat vt D M L aut
 D N L : duæ rectæ lineæ concludent superficiem,
 contra vltimam animi Notionem. Itidem ab eodem
 D puncto, ducam lineam D K : quæ etiam efficitur
 eadem cum linea D F. Ac demùm Linea L K
 ducta efficietur eadem cum linea E F. Iam verò manifestum est lineam D L esse
 æqualem lineæ D G, ac propterea ipsi A B, ex constructione & animi Notione:
 lineam quoque D K esse æqualem D H, seu A C : atque angulum L D K esse
 æqualem angulo D E F, immò eundem : ac propterea æqualem angulo B A C :
 spatiumq; comprehensum à lineis D L & D K, esse omninò æquale spatio com-
 prehensò à lineis A B & A C. At spatium L D K clauditur linea æquali, immò
 eadem cum linea E F. Et spatium igitur B A C clauditur linea æquali ipsi E F li-
 neæ. Quare æqualis E F ipsi B C, Quod erat demonstrandum.

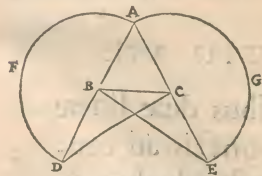
Hinc patent reliqua Theorematũ capitula: nempe reliquorum angulorũ inter se, & duorum Triangulorum æqualitas. Neq; est quod contendat quis, eandem esse utrobique rationem applicationis Triangulorum. Aliud nanque est, Triangula transponere, quàm per simile & æquale demonstrare. Probatio enim hæc vltima è Circuli pendet officio.

THEOREMA 2, PROPOSITIO V.

Iſoſcelium Triangulorum qui ad baſin ſunt anguli, inter ſe ſunt æquales: Et productis æqualibus lineis, qui ſub baſi ſunt anguli, inter ſe quoque ſunt æquales.

Sit Triangulum ABC , cuius duo latera AB & AC sint æqualia. Dico angulum ABC æqualem esse angulo ACB : Et si protrahantur AB & AC , ut ad D & E puncta: angulum DBC æqualem esse angulo ECB .

Ponam, per tertiam Propositionem, lineam AD æqualem lineæ AE : ductisq; DC & EB , intelligam duo Triangula ABE & ACD . Et quoniam duo latera AB & AE Trianguli ABE , sunt æqualia duobus lateribus AC & AD Trianguli ACD : & angulus A utrique communis: erit, per antecedentem, basis BE , basi CD æqualis: & angulus E angulo D , angulusq; ABE , angulo ACD . Rursus intellectis duobus Triangulis BCD & CBE , erunt duo latera BC & CD Trianguli BCD , æqualia duobus lateribus CB & EB Trianguli CBE . Et quia angulus D vnus æqualis est angulo E alterius, vt iam probauimus: erit, per antecedentem, BCD Triangulum, ipsi CBE Triangulo æqua-



le: ac propterea angulus BCD , angulo CBE æqualis. Quum itaque totus angulus ABE probatus sit toti angulo ACD æqualis: ablato BCD à toto ABE , ablatoq; CBE à toto ACD : supererunt ABC & ACB anguli, per communem Notionem, æquales, Quod est prius. Et quoniam, per ipsam antecedentem, angulus BCE ipsi CBD angulo est æqualis: patet secundum.

Atque vt ostenderemus quantum possit vbique Circulus,descripsimus A F D se-
b 3 micirc

micirculum, secundum spatium BA : cuius centrum B : & alterum AGE , secundum spatium CA : cuius centrum C . Nam integros Circulos describere non erat necessarium. Vbi, ex Centri & Circuli definitione, constat lineas AB , BD : AC & CE æquales esse inter se: quum exeant à centris Circulorum æqualium: ac propterea AB & AE æquales inter se, ex communi Notione. Ac tum procedet demonstratio modò posita, meo iudicio facilior. Triangulorum enim æqualitas sefe euidentiore exhibet.

HI c etiam obiter monebimus hanc Propositionem in communi iudicio positam esse, ut superiorem. Nam si duo Triangula pro vno intelligamus: scilicet Triangulum ABC , cuius basis AC : & Triangulum ACD , cuius basis AD : quum duo latera AB & BC vnus, sint æqualia duobus AC & CB alterius, basisq; AC æqualis basi AB : erit, ex definitione æqualium angulorum, seu per antecedentem, ABC angulus, æqualis ACB angulo, Quod est prius. Tum, ex posteriori nostra constructione, de duobus angulis BCE & CBD idem erit iudicium: quum probatæ fuerint bases BE & CD æquales.

THEOREMA 3, PROPOSITIO VI.

Cuiuscunque Trianguli duo anguli æquales fuerint: duo quoq; latera illos angulos subtendentia, æqualia erunt.

Hæc est Conuersa prioris partis antecedentis Propositionis. Sit Triangulū ABC , cuius duo anguli B & C sint æquales. Dico latus AB esse æquale lateri AC .

Nam si æqualia non sint: maius sit AB , si fieri possit: à quo rescindatur DB æquale ipsi AC , per tertiam Propositionem: ut sint duo Triangula ACB & DBC . Et quoniam duo latera DB & BC , Trianguli DBC , sunt æqualia duobus lateribus AC & CB , Trianguli ACB : & angulus B æqualis angulo C toti, ex hypothesi: erit per quartam, basis BC , basi AB æqualis: & angulus DCB angulo ABC æqualis. Quare quum angulus ACB , angulo ABC sit positus æqualis: erit, per primam animi Notionem, angulus DCB , angulo ACB æqualis, pars toti: quod esse non potest.

ANIMADVERTENDVM, Conuersas Propositionū in vniuersum esse veras, sicut & Principiorum. Quum enim dicimus, Quæ sunt vni æqualia, inter se sunt æqualia; simul cognoscimus, si vnum quippiam fuerit duobus æquale, hæc duo inter se æqualia esse: Et, Si duo reliqua æqualia fuerint, & partes ab vtraque ablata æquales: tota quoque constat fuisse æqualia. Horum itaque Conuersas reticuit Euclides ut notissimas: Propositionum verò expressit, quod minus simplices essent, neque magis per se notæ quàm Directæ ipsæ: Deinde, quod non statim ad suas Directas consequerentur, ut ad Principia suæ: & nonnunquam externis probationibus egerent, ut in sequentibus passim occurrit.

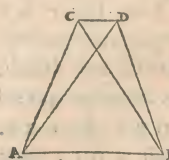
THEOREMA 4, PROPOSITIO VII.

Si à duobus punctis lineam terminantibus duæ lineæ exeuntes, concurrerint: ab iisdem punctis ad eandem partem, duæ aliæ non educuntur, his duabus, & vtraque suæ conterminæ, æquales.

Sit linea AB , à cuius terminis A & B , exeant duæ lineæ AC & BC concurrentes ad punctum C . Dico duas alias lineas, ut AD & BD , ab iisdem punctis A & B , & ad eandem partem, educi non posse, quæ duabus AC & BC vtraque suæ conterminæ æquales sit: scilicet AD ipsi AC , & BD ipsi BC .

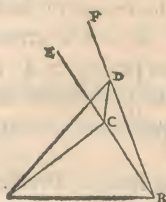
Quod

Quòd si fieri possit, tum concurrent AD & BD intra Triangulum ABC , aut extra (neque enim in AC aut BC concurrent. esset nanque pars toti æqualis). Si ergo concurrant extra Triangulum: aut altera illarum secabit Triangulum, aut neutra. Et secet prius altera, nempe AD , Trianguli latus BC : & connectatur CD : ut duo sint Triangula ACD & BCD .



Et quoniam Trianguli ACD , duo latera AC & AD sunt æqualia: erit angulus ACD æqualis angulo ADC , per quintam Propositionem. Idem quia Trianguli BCD , duo latera BC & BD sunt æqualia: erunt duo anguli BCD & BDC æquales. Et quia angulus BDC est maior angulo ADC : erit angulus BCD maior angulo ACD : per animi Notionem: Nam si duo æqualia, sint maiora tertio: erunt & maiora eo quod ipsi tertio est æquale. Erit igitur pars maior toto, Quod fieri non potest.

Si verò neutra secuerit Triangulum: connectam DC : & producam BC & ED ad E & F puncta, ut duo sint anguli ECD & FDC , sub basi CD .

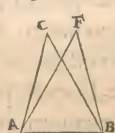
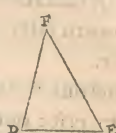
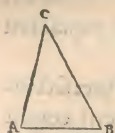


Et quoniam duo latera AC & AD Trianguli ACD , sunt æqualia: erunt anguli ACD & ADC , per quintam Propositionem, æquales. Rursus quia duo latera BC & BD Trianguli BCD , sunt æqualia: erunt duo anguli ECD & FDC sub basi, æquales, per alteram partem eiusdem. Quia ergo angulus ECD minor est angulo ACD : erit angulus FDC minor angulo ADC , totum parte. In idem absurdum intrudetur, si quis AD & BD dixerit conuenire intra Triangulum.

THEOREMA 5, PROPOSITIO VIII.

Si duo Triangula duo latera duobus lateribus mutuò æqualia habuerint, & basin basi æqualem: angulos quoque illis æquis lateribus cōtētos æquales habebunt.

Sint duo Triangula ABC & DEF : sitque latus AC æquale lateri DF , & BC æquale EF : basisque AB æqualis basi DE . Dico angulum C esse æqualem angulo F , & angulum A angulo D , & angulum B angulo E .



Superposita enim basi AB ipsi DE basi, neutra excedet alteram: quum sint æquales. Tum si angulus C conuenit cum angulo F : erit totum Triangulum toti Triangulo æquale, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, per quartam Propositionem: quum sint duo latera AC & BC , duobus DF & EF æqualia. Si verò punctum C non cadat super F punctum, sed cadat extra: tunc à duobus punctis D & E , duæ lineæ exeuntes AC & BC , concurrent: simulque DF & EF ad eandem partem, binæ suis conterminis erunt æquales, Quod per antecedentem fieri non potest.

Hanc demonstrandi rationem in quarta huius abundè refutauimus. Quare hæc Propositio tanquam per se nota habenda est. Quis enim negauerit duas Superficies esse æquales, quarum latera & quantitate & numero sunt æqualia? Vel ea demonstrabimus ratione quam illic tradidimus.

THEOREMA 6, PROPOSITIO IX.

Datum Angulum bifariam diuidere.

Sit datus Angulus ABC , quem oportet in duo æqualia diuidere. Lineam AB

b 4 notabo

notabo puncto fortuito D : & ex linea BC refecabo, per tertiam Propositionem, BE ipsi BD æqualem: & connectam DE . Tum super DE constituam, per primam Propositionem, Triangulum æquilaterum DEF : & ducam BF lineam. Hanc dico esse quæ diuidit angulum B datum in duo æqualia: scilicet duos angulos qui ad B , esse æquales. Intelligo enim duo Triangula DBF & EBF . Et quoniam duo latera BD & BE , Trianguli DBF , sunt æqualia duobus lateribus BE & BF , Trianguli BEF : illiusq; basis DF , huius basi EF , æqualis: erit, per antecedentem, angulus DBF , angulo EBF æqualis, Quod facere oportuit.

HANC DEMONSTRATIONIS formulam penè ad verbum adscribunt omnes: sed certè non satis firmam. Quid enim si aduersarius contendat vnum ex lateribus Trianguli æquilateri super DE constituti cadere in alteram linearum AB aut CD : vt in subiecta Figura Triangulum CDE sit æquilaterum? Tunc non erit locus ducendæ lineæ BF , propterea quod esset eadem cum BC . Occurrendum itaque fuit huic dubio per Quintam huius, positis DA & EC æqualibus, ductaq; AE linea. Illuc enim probatum est, latera CD & CE æqualia esse non posse: quum sint duo anguli CDE & CED inæquales. Ac tum stabit Demonstratio.

Sed & ex hac posteriori constructione, pulchra ostenditur ratio huiusce Problematis demonstrandi. Quum enim duæ lineæ AE & CD fursim ductæ ad puncta opposita D & E sese manifestò secent: si ducatur linea ab angulo dato B ad punctum intersectionis earum, vt linea BF : hæc diuidet angulum ipsum in duo æqualia.

Nam, per ea quæ ibidem demonstrata sunt, & ex quarta huius: sunt ambo Triangula ADE & CED inter se æquilatera & æquiangula: propterea quod duo anguli ADE & CED sunt, per secundam partem quintæ, æquales: & duo latera AD & DE æqualia duobus CE & ED : ob idq; duo anguli CDE & AED æquales. Vnde, per sextam, duo latera DF & EF , Trianguli DEF , æqualia. Intellectis itaque duobus Triangulis DBF & BEF , procedet Demonstratio vt in priori descriptione.

Sed & tota negotij huius ratio è Circulo depromitur: hoc est, ab æqualitate. Vtrum enim super linea DE constituatur Triangulum Æquilaterum an Isosceles, nihil interest: modò ad concursum duorum laterum æqualium ducatur linea: quæ hoc loco est linea BF .

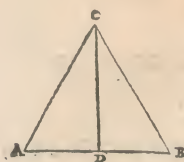
Punctum verò concursus, hoc est, punctum F , in intersectione duorum Circulorum æqualium situm erit: quorum centra D & E : vt in postremo Schemate: in quo ductis lineis DF & EF , constabit Demonstratio. Nam quum duo latera BD & DE , Trianguli DBF , sint æqualia duobus BE & EF , Trianguli BEF , basisq; BF vtrique communis: erunt duo anguli qui ad B inter se æquales. Satis autem esse visum est, si duorum Circulorum intersectionem appingeremus: sicut & deinceps faciemus, compendij causa.

Hic etiam animaduertes, Trianguli Isosceles vsum in Demonstrationibus firmiorem esse quàm Æquilateri.

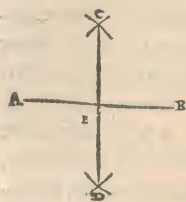
PROBLEMA 5, PROPOSITIO X.

Datam rectam lineam in duo æqualia secare.

Sit data linea AB , secanda in duo æqualia. Super hanc constituo Triangulum Æquilaterum (vel Isosceles, in idem enim recidit) sitque ABC . Cuius angulum C , per



per antecedentem, diuido in duo æqualia, ducta linea $c d$. Dico lineam ab bipartitò diuisam in puncto d . Intellectis enim duobus Triangulis acd & bcd : erunt duo latera ac & cd , Trianguli acd , æqualia duobus bc & cd , Trianguli bcd : & angulus c vnus, æqualis angulo c alterius. Quare, per quartam, erit basis ad æqualis basi de , Quod erat faciendum.



Huius quoque Problematis compendium è Circulo pendet. Positis enim centris in A & B punctis, liberisq; interuallis, sed æqualibus: quæ vtrinque ad oppositas intersectiones ducetur linea, secabit AB per æqualia: Qualis est hoc loco linea cd quæ in puncto E , lineam AB æqualiter diuidit. Intelliguntur enim duci ac & bc : vt fiant aec & bec Triangula inter se æquilatera.

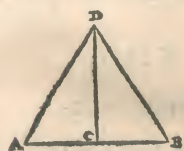
PROBLEMA 6, PROPOSITIO XI.

Data recta linea, à puncto in ea dato lineam ad perpendiculariculum erigere.

Sit data recta linea AB , & in ea datum punctum c : à quo linea perpendicularis excitanda sit. Pono cb æqualem ac , per tertiam: & super totam AB constituo, per primam, Triangulum abd Equilaterum (vel Iſosceles, semper intelligo): Et à puncto c excito lineam cd . Hanc dico esse perpendicularem ad punctum c .

Quoniam enim duo Triangula acd & bcd , ex ipsa constructione, sunt inter se æquilatera, & per octauam, æquiangula: erunt duo anguli qui ad c æquales, ac propterea recti, per decimam Definitionem. Quare, per eandem, linea cd perpendicularis, Quod erat faciendum.

Hic etiam satis agnoscitur Circuli vsus, eadem omninò descriptione obseruata quam in superiore exhibuimus. Illic enim anguli qui ad E , fuerunt æquales: ac propterea recti.

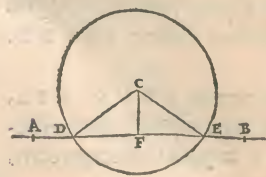


PROBLEMA 7, PROPOSITIO XII.

Ad datam rectam lineam interminatam, à puncto extra ipsam dato perpendicularem ducere.

Sit data linea interminata AB : punctum verò extra ipsam datum c : à quo ad ipsam AB sit ducenda perpendicularis.

Ponam centrum in puncto c , & describam Circulum, qui tantus sit, vt secet AB in duobus punctis, vt in d & e : Ductisq; lineis cd & ce , facio Triangulum cde : Cuius angulum c diuidat in duo æqualia, per nonam, linea cf demissa in de latus, secans ipsum in f puncto. Hanc dico esse perpendicularem super AB . Eritq; argumentatio eadem quæ in antecedente.



Quum enim duo latera cd & ce , Trianguli cde , sint æqualia duobus lateribus ce & cf , Trianguli cef , & angulus c vnus æqualis angulo c alterius: erit, per quartam, basis df æqualis basi ef : & duo anguli qui ad f æquales, ob idq; recti, per decimam Definitionem. Quare linea cf per perpendicularis super AB , Quod erat constitutum.

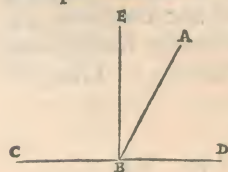
THEO

THEOREMA 6, PROPOSITIO XIII.

Quum recta linea super rectam steterit: duos angulos aut rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.

Recta enim linea AB stet super rectam CD . Dico duos angulos ABC & ABD , esse aut rectos, aut duobus rectis æquales.

Nam si ipsa AB perpendicularis fuerit, satis liquet angulos esse rectos, per Conuersionem decimæ Definitionis. Sin autem inclinet in litem D : erigam super CD , per vndecimam, à puncto B perpendicularem BE . Ex qua iam structura satis patet propositio. Nam quum angulus ABC tanto maior sit angulo CBE recto, quantus est angulus ABE : sitq; alter angulus ABD tanto minor angulo DBE itidem recto, quantus est idem ipse angulus ABE : ablato quod illi abundat, vt addatur quod huic deest: fient duo anguli recti.



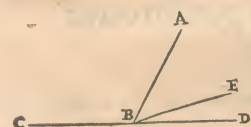
Scilicet, si ab angulo ABC obtuso, auferatur angulus ABE : manebit CBE rectus. Tum si idem ABE addatur angulo DBA acuto: efficietur angulus DBE rectus. Quapropter hic non opus est alia argumentationis forma. Est enim ex ijs quæ intellectum turbare potius quàm iuuare possit. Satis enim manifestum est duos angulos, nempe ABC obtusum & ABD acutum, æquale, immò vnum & idem completi spatium cum duobus angulis CBE & DBE rectis.

THEOREMA 7, PROPOSITIO XIII.

Si ad aliquod rectæ lineæ punctum duæ rectæ lineæ coërint, duosq; angulos cum ipsa aut rectos aut duobus rectis æquales fecerint: ambæ in continuum erunt & linea vna.

Sit linea recta AB : ad cuius punctum B duæ rectæ coëant, CB & DB : duoq; anguli CBA & DBA , aut sint recti, aut duobus rectis æquales. Dico ambas CB & BD sibi esse in directum: scilicet, CD esse lineam vnam.

Si enim non sit linea vna, tunc CB continuata, verbi gratia, ad punctum E , transibit supra BD , aut infra. Transeat ergo supra, si fieri possit: vt sit CE linea vna.



Quum itaque recta linea AB super rectam CE cadat: erunt, per antecedentem, duo anguli ABC & ABE , duobus rectis æquales. Rursus, quum duo anguli ABC & ABD sint duobus rectis æquales, per hypothesin: erunt, per primam Notionem, duo anguli ABC & ABE , æquales duobus angulis ABC & ABD . Communis auferatur ABC : relinquetur angulus ABE , per tertiam animi Notionem, angulo ABD æqualis, pars tota, Quod est absurdum. Eadem ratione probabitur CB protracta non cadere infra BD . Erit igitur CD linea vna, Quod erat ostendendum.

Sed & primo statim intuitu sic ratiocinabimur. Duo anguli CBA & ABE , sunt pars duorum CBA & ABD . At CBA & ABD sunt æquales duobus rectis, per hypothesin. Quare non erunt duo CBA & ABE æquales duobus rectis, ne sit pars toti æqualis.

THEOREMA 8, PROPOSITIO XV.

Si recta linea rectam lineam secuerit: angulos sectionis oppositos æquales efficiet.

Sit recta

Sit recta linea AB , secans rectam CD in puncto E . Dico angulum AEC , æqualem esse angulo DEB : & angulum BEC , æqualem angulo AED .

Quoniam enim duo anguli AEC & CEB , per decimamtertiam, duobus rectis sunt æquales: itemq; duo anguli CEB & DEB , duobus rectis æquales: erunt, per primam Notionem, duo anguli AEC & DEB , æquales duobus CEB & DEB . Ablato igitur cōmuni CEB , supererunt, per tertiā Notionē, duo anguli, AEC & DEB æquales. Similiter probabuntur duo anguli AED & CED æquales.

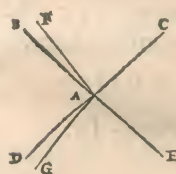
Ex hac consequitur illud,

Due lineæ rectæ se decussantes, quatuor angulos rectos faciunt, aut quatuor rectis æquales.

Conuersam huius decimæquintæ adscripsimus in hæc verba,

Si quatuor rectæ lineæ ab vno puncto exeuntes, quatuor angulos fecerint, quorum bini oppositi æquales fuerint: binæ aduersæ lineæ in rectum sibi erunt & linea vna.

Sint quatuor lineæ AB , AC , AD & AE , exeuntes à puncto A , constituentes quatuor angulos ad ipsum A punctum: quorum angulus BAC sit æqualis angulo DAE : & angulus BAD , angulo CAE . Dico BE & CD esse duas tantum lineas: hoc est, duas BA & AE esse sibi in continuum, & vnicam efficere lineam: duas itidem CA & AD , vnicam.



Sin aliter: ponatur, si fieri possit, EF linea vna: & CG itidem vna. Quum itaq; recta EA incidat in CG rectam: erunt duo anguli EAC & EAG , per decimamtertiam, duobus rectis æquales. Quumq; recta GA super rectam EF incidat: erunt, per eandem, duo anguli EAG & FAG , duobus rectis æquales. Comuni igitur ablato EAG : erit per communem sententiā, angulus EAC , æqualis angulo FAG . Sed & ipse EAC positus fuit æqualis angulo BAD . Erit ergo BAD ipsi FAG æqualis, pars toti, Quod esse non potest. Idem omnino proueniet absurdum, in quancunque partem protrahantur lineæ. Quare BE vna est linea, & CD vna, Quod fuit demonstrandum.

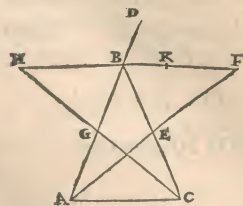
THEOREMA 9, PROPOSITIO XVI.

Omnis Trianguli vno latere producto, exterior angulus vtrolibet interiori opposito maior est.

Sit Triangulum ABC , Cuius latus AB protrahatur ad punctum D . Dico angulum DBC , maiorem vtrolibet angulorum ACB & BAC .

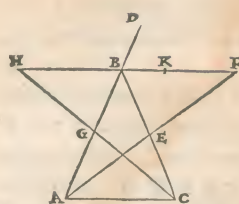
Diuidam BC æqualiter, per decimam Propositionem, in puncto E : & connectam AE : quam protraham ad punctum F : & ponam EF æqualem ipsi AE , per tertiam: & connectam FB : vt duo sint Triangula AEC & FEB .

Primum itaque ostendemus ipsum DBC angulum, maiorem esse angulo BCA interiori. Quoniam enim duo latera AE & EC , Trianguli AEC , sunt æqualia duobus lateribus EF & EB , Trianguli FEB : & angulus E vnius, per antecedentem, angulo E alterius æqualis: erit per quartam, angulus EBF æqualis angulo ECA . Sed angulus DBC maior est angulo EBF . Quare, per animi Notionem, erit & maior angulo ECA , Quod erat probandum.



Eadem ratione probabimus angulum CBD , maiorem esse angulo CAB : diuisa scilicet BA in duo æqualia, in puncto G , ductaq; CG & protracta ad punctum H , vt sint CG & HG æquales: ac demum connexa HB , & protracta in K punctum. Intellego enim duo Triangula ACG & GKH : Quo-

rum



rum latera AG & CG , lateribus BG & HC sunt mutuò equalia: & angulus G vnus, per antecedentē, angulo G alterius æqualis: & per quartā, angulus GBH , angulo GAC : & per antecedentem & animi Notionē, angulus DBK eidem GAC æqualis. At DBC maior est quàm DBK : Quare & maior quàm GAC , Quod erat demonstrandum.

Linea HB protracta est ad K : quoniā adhuc non constat HB & BF esse in directum: quanuis res ipsa sic habeat. Sed est Mathematici, dubitationibus quibuscunque occurrere.

ALITER. Sit Triangulum ABC , cuius latus AB protrahatur ad punctum D . Dico angulum DBC maiorem esse utrolibet angulorum BAC & ACB .

Quoniam enim duæ lineæ AC & BC coeunt in puncto C , & in ipsas incidit recta AB : erunt, per conuersum modum quintæ Petitionis, duo anguli interiores & ex eadem parte, scilicet ABC & CAB , duobus rectis minores. Sed anguli ABC

& DBC , per decimamtertiam, duobus rectis sunt æquales. Duo igitur ipsi ABC & DBC maiores sunt duobus ABC & BAC . Quare dempto communi ABC , relinquetur angulus DBC maior angulo BAC . Eadem ratione, quum duæ lineæ BA & CA coeant in puncto A , & in eas recta incidat CB : erunt duo anguli interiores ABC & ACB duobus rectis minores. Sed ABC & DBC duobus rectis sunt æquales. Sunt igitur duo anguli ABC & DBC duobus ABC & ACB maiores. Quare ablato communi ABC , supererit ut angulus DBC maior sit angulo ACB , Quod erat demonstrandum.

THEOREMA 10, PROPOSITIO XVII.

Bini anguli cuiuslibet Trianguli, quomodocunque sumantur, duobus rectis sunt minores.

Poterat commodè hoc Theorema cum antecedente connecti. Illo enim cognito statim hoc notum euadit: sicut Euclides postea facturum est in ea Propositione quæ est ordine Trigesima secunda. Vtriusque enim par est ratio & consecutio.

Sit Triangulum ABC . Dico binos ipsius, quomodocunque sumantur, angulos minores esse duobus rectis.

Protracto enim latere DB ad punctum D , quum angulus B exterior, sit per antecedentem, maior utrolibet angulorum D & C : idem ipse B exterior cum B interiori, sit per decimamtertiam, duobus rectis æquales: erunt, per communem Notionem, angulus A & angulus B interior, duobus rectis minores: similiterque angulus C & idem B interior, duobus rectis minores, Quod erat demonstrandum.

Sic igitur instituetur argumentatio. Angulus A interior cum angulo B exteriori est æqualis duobus rectis, per decimamtertiam: sed angulus A (ut & angulus E) cum angulo B interiori, per antecedentem, minor est duobus angulis B interiori & exteriori. Est ergo angulus A (ut angulus C) cum angulo B interiori, minor duobus rectis, Quod erat demonstrandum.

Sed & sine antecedentis adminiculo, argumentari possumus per Conuersam quintæ Petitionis, & per decimamtertiam Propositionem: sicut in superiore fecimus.

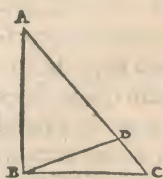
THEOREMA 11, PROPOSITIO XVIII.

Maius latus cuiuslibet Trianguli, maiorem subtendit angulum.

Sit Triangulum ABC , cuius latus AC sit maius latere AB . Dico angulum ABC , maiorem esse angulo BAC .

Ex

Ex latere AC maiori abscindam, per tertiam, AD æquale ipsi AB : & connectam BD .



Intellectis igitur duobus Triangulis ABD & BCD , erunt duo anguli ABD & ADB , Trianguli ABD , per quintam, inter se æquales. Atqui angulus ADB maior est, per decimam sextam, angulo BCD interiori opposito: Ob idq; angulus ABD eodem angulo BCD maior. Quare & angulus ABC totus, multo maior ipso BCD angulo, Quod erat ostendendum.

Quòd si latus AB ponatur maius latere BC : iisdem argumentis probabitur angulus C maior angulo A : refecto AB ad æqualitatem BC . Ac in summa, binorum quoruncunque laterum comparatio iisdem rationibus nitetur, refecto semper maiore ad æqualitatem minoris.

THEOREMA 12, PROPOSITIO XIX.

Maior angulus cuiuslibet Trianguli, maiori etiam lateri opponitur.



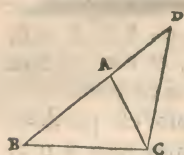
Sit Triangulum ABC , cuius angulus B maior sit angulo C . Dico latus AC maius esse latere AB .

Primum enim æquale esse non potest latus AC lateri AB : Eset enim, per quintam, angulus B æqualis angulo C , contra hypothesin. Minus etiam non erit: Minor enim esset angulus B angulo C , per antecedentem, contra hypothesin. Hoc Theorema annexi poterat superiori.

THEOREMA 13, PROPOSITIO XX.

Duo latera cuiuslibet Trianguli reliquo sunt maiora, quomodocunque sumpta.

Sit Triangulum ABC . Dico duo latera AB & AC simul sumpta, reliquo BC esse maiora.

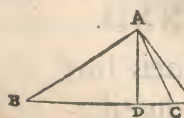


Protraham BA ad punctum D , & ponam AD æqualem ipsi AC , per tertiam: & connectam CD . Et quoniam duo anguli ACD & ADC sunt, per quintam, æquales: erit BCD maior ipso ADC : quum sit maior quàm ACD . Vnde, per antecedentem, latus BD maius erit latere BC . Atqui latus BD æquale est lateribus AB & AC . Sunt igitur latera AB & AC maiora latere BC , Quod fuit demonstrandum.

Eadem erit probandi ratio, si bina quævis latera cum tertio comparentur.

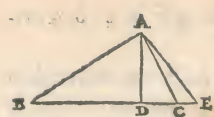
EX RECTO etiam demonstrabimus in hunc modum. Sit Triangulum ABC : cuius latus BC , lucidioris doctrinæ gratia, ponatur maximum trium laterum: ut quum probatum fuerit de maximo, nulla sit de vtrius reliquorum controversia. Dico duo latera AB & AC simul sumpta, maiora esse latere BC .

A puncto A in rectam BC , per duodecimam, demitto perpendicularem AD : ut duo sint Triangula ABD & ADC . Et quia uterque angulus qui ad D rectus



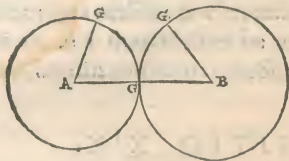
est: erit, per decimam septimam, angulus ADB maior angulo BAD : & per decimam nonam, latus AB maius latere BD , latusque AC maius latere DC . Sed BD & DC constituunt ipsum BC . Erunt igitur duo latera AB & AC maiora latere BC , Quod erat demonstrandum.

Quòd si linea perpendicularis sit eadem cum latere AC , tum BC non erit maximum laterum, per decimam septimam & decimam nonam. Quapropter erit deducenda



cenda perpendicularis ad AB latus maximum. Si verò aduersarius contendat lineam perpendicularē cadere extra Triangulum, ut lineam AE : tum angulus ACB maior erit, per decimā sextā, angulo AEC recto, exterior interiori. Vnde AB , per decimā septimam & decimā nonā, maius esset utrolibet laterū AC & BC , contra hypothēsin.

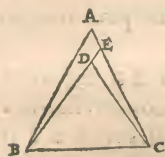
H O C N O B I S Theorema ratio magnitudinum præscribit. Nam quum super duos terminos A & B lineam AB statuerimus duas lineas AG & BG , quæ simul iunctæ tantum sint æquales ipsi AB : si ambæ inclinari cœperint altera alteram versùs, stantibus fixis A & B punctis: duo ipsarū puncta quæ ad G , non prius coibunt quàm super AB iaceant, & vnum punctum G efficiāt. Quod ex Circulis secundum ambarum linearum quātitatem ductis, positisque, centris in A & B , est manifestum. Hi enim nusquam secant inter se, ut hîc adscriptum vides: Ob idq̃, ex his tribus lineis nunquàm conflabitur Triangulum. Duæ enim AG & BG circumductæ nunquàm egredientur peripheriam. In hoc etiam extat præcipua quædam vis, & ut sic dicam, autoritas Circuli: immò Naturæ quædam præstantia, quæ in Geometricis passim relucet.



THEOREMA 14, PROPOSITIO XXI.

Si à duobus terminis vnus laterum Trianguli duæ lineæ exeuntes, intra Triangulum coierint: hæ reliquis duobus Trianguli lateribus minores erunt, & maiorem angulum continebunt.

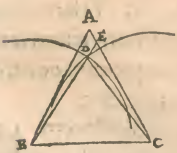
Sit Triangulum ABC : & à duobus terminis B & C lateris BC , exeant duæ lineæ BD & CD , coeuntes intra Triangulum in puncto D . Dico duas BD & CD minores esse duabus AB & AC : Et angulum BDC maiorem angulo BAC .



Producam BD donec secet AC in puncto E . Et quoniam duo latera AB & AE Trianguli ABE , sunt, per vigesimam, maiora tertio BE : Et per eandem, DE & EC maiora tertio DC : erunt quatuor AB , AE , DE , & EC , maiora tribus BD , DE , & DC . Commune auferatur DE : erunt tria AB , AE , & EC (ea sunt AB & AC) maiora duobus BD & DC , Quod est prius.

Altera pars sic probatur. Angulus BEC Trianguli BEC , maior est, per decimā sextam, angulo BAC : Et per eandem, angulus BDC maior ipso BDC . Maior ergo BDC ipso BAC , Quod erat demonstrandum.

Prior pars facile patebat, descriptis duobus Circulis secundum spatium duarum BD & CD , positisque, centris in B & C . Omnino enim duo Circuli secabunt hinc inde duo latera AB & AC . Ac tum erit æqualitas inter duo segmenta duasq̃, BD & CD : Sicq̃, per nonam Notionem, erunt AB & AC maiores ipsis BD & CD . Neque enim transibunt Circuli per punctum A , repugnante septima Propositione.



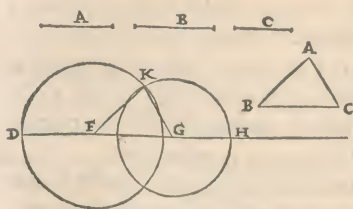
PROBLEMA 8, PROPOSITIO XXII.

Ex tribus rectis lineis quæ tribus datis rectis lineis sint æquales, Triangulum perficere: Modò tamen duæ illarum quomodocunque sumptæ, reliqua sint maiores.

Sint tres lineæ datæ A , B , C , quarum duæ quomodocunque sumptæ, tertia sint maiores.

maiores. (Alioqui aptæ non essent ad Triangulum constituendum, per vigesimam). Volo ex tribus lineis. Quæ sint his tribus datis æquales, Triangulum conficere.

Ex linea quapiam interminata abscindo, per tertiam, DF æqualem lineæ A : & FG æqualem lineæ B : & GH æqualem lineæ C . Tum centro F , spatio verò FD ,



describo Circulum DKD : itemq; centro G , spatio verò GH , describo Circulum HKH . Hi duo Circuli se omnino secabunt inter se. Ducta enim linea à centro F ad peripheriã DKD , non haberet quò cõcurreret cum linea ducta à centro G ad peripheriam HKH : sicq; essent ambæ simul sumptæ aut æquales ipsi FG , aut eadem minores, contra hypothesin. Sit itaque altera interfectio-

num in puncto K . Ad quam ducō FK & GK . Dico tria latera Trianguli FGK tribus lineis datis esse æqualia.

Quum enim FG linea, quæ posita est æqualis lineæ B , sit vnum laterum ipsius Trianguli: & latus FG sit æquale lineæ FD , ex Centri definitione, quæ posita est æqualis lineæ A : erit & ipsum FG latus, per primam Notionem, ipsi A æquale. Demum quum tertium latus GK , eadem lege Centri, sit æquale lineæ GH , quæ ipsa per eandem Notionem, æqualis est lineæ C : constat Propositio.

Hoc Problema in hanc sententiam poterat proponi.

Dato Triangulo Triangulum æquale & æquilaterum constituere.

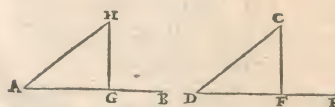
Vt si proponeretur Triangulum ABC , statuerem tres lineas in continuum ad æqualitatem trium laterum ipsius: Et procederet Demonstratio quam modò dedimus, adiumento octauæ & quartæ. Immo adeò poterat statim proponi à tertia Propositione, & solius Circuli officio absolui.

Quod autem de lineis proposuit Euclides, id nos docuit vt dignosceremus vtrum ex tribus datis lineis confici possit Triangulum an non: quod ex ipsis Circulis, si fecerint se inuicem, perspicimus.

PROBLEMA 9, PROPOSITIO XXII.

Proposita recta linea, ad datum in ea punctum dato angulo rectilineo angulum æqualem constituere.

Sit data recta linea AB , datumq; in ea punctum A : datus verò angulus rectilineus CDE . Volo ad datum punctum A angulum rectilincum dato angulo CDE æqualem constituere.

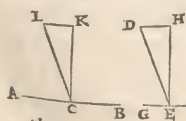


In recta DE signetur punctum liberum F : & connexa CF , fiat Triangulum CDF . Iam ex tribus lineis quæ sint æquales tribus lateribus DE , DC , & CF , constituo Triangulum AGH . Quod

quidem, ex ipsa constructione, manifestò æquale est Triangulo DCF : aut si autoritatem requiris, ex octaua. Ob idq; angulus A , angulo D equalis, Quod erat faciendū.

Hoc ETIAM ex Recto perficiemus. Sit enim linea data AB , datumq; in ea punctum C : datus verò angulus DEF . Volo ad punctum C statuere angulum angulo DEF æqualem.

Produco FE in G punctum: Ac super punctum E erigo, per vndecimam, ad rectos angulos lineam EH : Quæ si congruat cum ED linea: erat datus angulus, rectus: Quapropter erecta perpendiculari super C punctū, habebimus quæsitum. Sin aliter, excitabo perpendicularem ad punctum H : cum qua coibit, per quartam Petitionem, linea ED ducta. Est enim angulus DEH minor recto:



c 2 recto:

recto: quum GEH sit rectus. Concurrent igitur in puncto D , ut fiat Triangulum DEH . Eodem modo erigo super punctum C datum, perpendicularem CK , quæ sit æqualis perpendiculari EH : simulq; super punctum K , alteram perpendicularem KL , quæ sit æqualis perpendiculari HD : Et connecto CL . Dico itaq; angulum LCB æqualem esse angulo DEF dato.

Sunt enim duo HEH & KCL Triangula, per quartam, inter se æqualia & æquilatera: & duo anguli LCK & DEH æquales. Atqui duo BCK & FEH anguli sunt æquales, uterque enim rectus. Quare, per secundam Notionem, erit totus angulus LCB , toti angulo DEF æqualis, Quod erat constitutum.

Quod si perpendicularis extra angulum datum ceciderit, nempe si acutus fuerit: eadem erit probandi ratio, nisi quod pro secunda, tertiam inducemus Notionem.

THEOREMA 15, PROPOSITIO XXIII.

Si duo Triangula duo latera duobus lateribus mutuò æqualia habuerint, angulorum verò sub illis æquis lateribus contentorum alter fuerit altero maior: basis quoque maiorem respiciens angulum altera basi maior erit.

Sint duo Triangula ABC & DEF : sintq; duo latera AB & AC , duobus DE & DF mutuò æqualia: scilicet AB æquale DE : & AC æquale DF : sed sit angulus A maior angulo D . Aio basin BC maiorem esse basi EF .

Ponam enim, secundum doctrinam antecedentis, angulum EDG æqualem angulo A : Et, per secundam, DG lineam æqualem AC lineæ. Et connectam EG rectam: Quæ aut transibit supra EF , aut super eandem, aut infra. Et cadat primum supra EF , ut secet ipsam DF in puncto H . Et manifestum est, ex quarta, Triangulum DEG æquale esse & æquilaterum Triangulo ABC .

Quoniam itaq; Trianguli DFG duo latera DF & DG sunt æqualia: utrunq; enim æquale AC : erunt, per quintam, duo anguli DFG & DGF super basin, æquales. Quapropter maior erit angulus DFG angulo FGE : ob idq; multò maior angulus totus EFH ipso FGE . Maius itaque, per decimamnonam, latus EH latere EF . Quare, quum EG sit æquale BC : maior est BC basis, ipsa EF basi, Quod fuit demonstrandum.

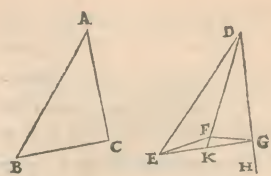
ITEM ALITER. Maior est angulus HFG , ut iam ostendimus, ipso FGE . Maius est igitur, per decimamnonam, GH latus ipso FG latere. Atqui EH & HF , per vigesimam, sunt maiora EF . Quare multò maiora sunt EH & HG (id est EG) ipso EF . Igitur & AC maius ipso EF , Quod fuit ostendendum.

Si verò EG transeat super EF : tum EF erit pars ipsius: Vnde EG maior erit.

Transeat iam EG infra EF : duæq; DF & DG , quæ positæ sunt æquales, protrahantur ad H & K puncta, ut DF secet EG in puncto K . Eruntq; per secundam partem quintæ, duo anguli sub basi FCH & GFK inter se æquales. Maior itaq; erit angulus GFK angulo EGF : ob idq; multò maior EFH ipso EGF . Quare maius est, per decimamnonam, latus EH (idem & BC) latere EF , Quod erat demonstrandum.

ALITER. Quum duo anguli FCH & GFK sint æquales: erit maior GFK ipso FCK . Maius itaque per decimamnonam, latus KG , latere FK . Sed EK & FK , per vigesimam, sunt maiora EF . Quare multò maiora sunt EK & KG (id est EG) ipso EF , Quod erat ostendendum.

R V R S



genium acuit, & memoriam exercet.

R V R S V S ex vigesima prima. Duo latera DC & EG sunt maiora duobus DF & EF . Quare quum DC posita sit æqualis DF : supererit FG maior EF . Sed ut hinc admonet Campanus, præstat prior demonstrandi ratio: ut ex utraque parte quintæ Propositionis ducatur argumentatio. Iucunda tamen illa varietas ingenium acuit, & memoriam exercet.

THEOREMA 16, PROPOSITIO XXV.

Si duo Triangula, duo latera duobus lateribus mutuò æqualia habuerint, basis verò vnius basi alterius fuerit maior: angulus quoque maiori basi oppositus, maior erit angulo minori basi opposito.

Sint duo Triangula ABC & DEF : sintq; duo latera AB & AC , duobus lateribus DE & DF mutuò æqualia: sed basis BC maior basi EF . Dico angulum A maiorem angulo D . Hæc est Conuersa antecedētis.

Primùm itaq; æquales non erunt: Effet enim basis BC per quartam, basi BF æqualis, contra hypothesin. Neq; erit angulus A minor angulo D : Effet enim, per antecedentem, basis EF maior basi BC , contra hypothesin. Superest igitur ut A sit maior D , Quod fuit probandum.

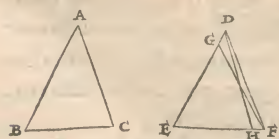
Manifestum quoque fuit hoc Theorema ex quarta, immò ex se ipso. Sed quia ex antecedentibus probationem recipit: cum cæteris in ordinem redactum est.

THEOREMA 17, PROPOSITIO XXVI.

Si duo Triangula, duos angulos duobus angulis mutuò æquales habuerint, latusq; vnum vni lateri æquale, siue quod æquis adiacet angulis, siue quod vni æqualium angulorum subtenditur: reliqua quoque latera reliquis lateribus mutuò æqualia, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

Sint duo Triangula ABC & DEF , sitq; angulus B æqualis angulo E , & angulus C angulo F : Et sit aut latus BC æquale lateri EF : aut AB æquale DE : aut deniq; AC æquale DF . Aio reliqua duo latera, reliquis duobus esse lateribus æqualia: ac reliquum angulum A reliquo angulo D æqualem.

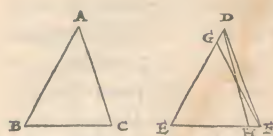
Primùm igitur sit latus BC , cui incumbunt duo anguli B & C , æquale lateri EF , cui incumbunt anguli E & F , positi æquales ipsis B & C . Dico latus AB æquale esse lateri DE : & latus AC , lateri DF : & angulum A , angulo D .



Nam si æquale non fuerit AB ipsi DE , sit DE maior: & rescindatur GE æquale ipsi AB : & connectatur FG . Eritq; per quartam, angulus EGF æqualis angulo C : quapropter & angulo EFD , pars totius, quod est absurdum. Erit igitur DE æquale ipsi AB : ob idq; per eandem, DF æquale AC : & angulus D , angulo A , sicut voluimus.

Sint rursus duo anguli B & C æquales duobus E & F : sitq; latus AB quod subtenditur angulo C , æquale lateri DE quod subtenditur angulo F , cui positus est æqualis angulus C . Aio latus BC æquale esse lateri EF : & latus AC , lateri DF : & angulum A , angulo D .

c 3 Si

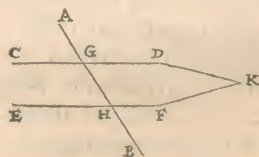


Si enim BC & EF latera non fuerint æqualia, sit EF maius: & ponatur EH æquale BC : & connectatur DH . Eritq; per quartam, angulus DHE æqualis angulo ACB : ob idq; & angulo EFD , exterior interiori opposito, contra decimanisextam. Est igitur EF latus æquale BC lateri. Quapropter & DF , per quartam, æquale AC : & angulus EDF , angulo A . Sicq; patet propositio.

THEOREMA 18, PROPOSITIO XXVII.

Si duas rectas lineas recta linea secuerit, duosq; interiores alternos angulos æquales fecerit: illæ duæ lineæ erunt paralleli.

Sit linea AB , secans duas lineas, CD quidem in puncto G , & EF in puncto H : sintq; duo anguli alterni DGH & EHG , æquales. Dico duas lineas CD & EF esse parallelos seu æquidistantes.



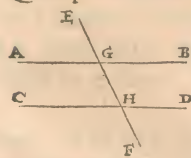
Sin minus, concurrant protractæ ad punctum K , si fieri possit: ut sit Triangulum GKH . Cuius angulus KGH interior, erit ex positu, æqualis angulo EHG exteriori opposito, Quod in Triangulis fieri nequit, per decimanisextam. Non igitur concurrunt CD & EF lineæ. Quare, per Definitionem Parallelorum, ipsæ æquidistant altera alteri, Quod erat demonstrandum.

THEOREMA 19, PROPOSITIO XXVIII.

Si duas rectas lineas recta secans linea, exteriorem angulum interiori opposito & ex eadem parte æqualem fecerit, aut duos interiores ex eadem parte duobus rectis æquales: duæ lineæ erunt paralleli.

Sint duæ lineæ AB & CD , quas secet linea EF , illam quidem in puncto G , hanc verò in puncto H : sitq; angulus G exterior angulo H interiori ex eadem parte æqualis: aut duo anguli H & G interiores ex eadem parte, duobus rectis æquales. Dico duas AB & CD lineas esse æquidistantes.

Quum enim EGB angulus, sit ex positu, æqualis DHG angulo: sitq;, per decimanisquintam, AGH eidem EGB æqualis: erunt AGH & DHG alterni, æquales. Quare, per antecedentē, duæ AB & CD lineæ æquidistant inter se, Quod est prius.



Sint porro duo anguli AGH & CHG duobus rectis æquales. Dico sic quoque duas AB & CD inter se æquidistare.

Quum enim duo anguli CHG & DHG , sint per decimanisquintam, duobus rectis æquales: si vtrunque auferatur CHG angulus: remanebunt, per communem Notionem, duo AGH & DHG alterni, æquales. Quare, per antecedentem,

duæ AB & CD inter se æquidistant, Quod fuit demonstrandum.

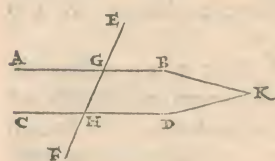
Huius Theorematis pars posterior connexa est cū Petitione vltima. Nam si duæ lineæ concurrere dicuntur, quæ cum linea ipsas secante duos angulos interiores ex eadem parte duobus rectis minores faciunt: conuerso modo, Quæ concurrunt, eæ duos angulos interiores ex eadem parte duobus rectis minores efficiunt. Atqui AB & CD lineæ, duos eiusmodi angulos duobus rectis minores non efficiunt, immò æquales: Non concurrunt igitur. Quare Paralleli sunt.

THEO

THEOREMA 20, PROPOSITIO XXIX.

Si duas Parallelos recta secet linea: erunt duo anguli alterni æquales: & angulus exterior interiori sibi opposito ex eadem parte æqualis: itemq; duo anguli interiores ex alterutra parte constituti, æquales duobus rectis.

Sint duæ AB & CD paralleli, quas secet linea EF in punctis G & H. Dico duos angulos BGH & CHG alternos, æquales esse: Angulum item G exteriorem angulo H interiori, ipsi ex eadem parte opposito, æqualem: Angulos denique G & H ex eadem parte interiores simul sumptos, æquales esse duobus rectis. Hæc est Conclusa duarum antecedentium: Cuius primum caput sic probatur.



Si duo anguli BGH & CHG non sint æquales, sit maior ipse CHG. Et quoniam CHG & DHG sunt, per decimamtertiam, duobus rectis æquales: erunt duo BGH & DHG duobus rectis minores. Vnde fiet ut duæ lineæ AB & CD in alterutram partem productæ concurrant, ut ad punctum K: Quod erit contra hypothesin, quum sint paralleli. Sunt igitur anguli BGH

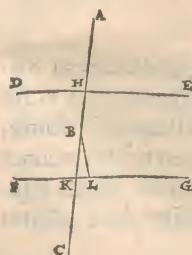
& CHG æquales.

Ad hoc consequitur secundum. Est enim, per decimamquintam, angulus AGE æqualis angulo BGH: vnde & ipsi CHG, per communem Notionem, æqualis, exteriori interiori.

Hinc rursus colligitur tertium. Nam quum AGE & AGH, sint per decimamtertiam, æquales duobus rectis: erunt quoq; per animi Notionem, CHG & AGH æquales duobus rectis: ambo interiores & ex eadem parte, Quod erat demonstrandum.

Si duæ rectæ lineæ quæ duas parallelos secant, inter ipsas ad unum punctum coierint, duosq; angulos alternos æquales fecerint: aut angulum exteriori interiori sibi opposito ex eadem parte æqualem: aut denique duos interiores ex alterutra parte duobus rectis æquales: eæ duæ lineæ in continuum erunt & linea vna.

Sint duæ lineæ AB & CB, quæ duas parallelos DE & FG secant: AB quidem ipsam DE in puncto H: & CB ipsam FG in puncto K: Sitq; angulus DHB æqualis angulo BKG: aut angulus AHD æqualis angulo BKF: aut deniq; BHD & BKF æquales sint duobus rectis. Dico duas AB & CB esse in continuum & lineam vnam.



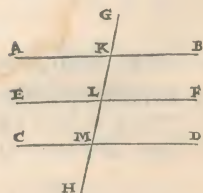
Si enim non sint eiusmodi: protrahatur AB, ut secet FG in puncto L, & sit AL linea vna: sitq; Triangulum BLK. Et erit angulus DHB æqualis angulo GLB alterno, per primam partem huius vigesimænonæ: Quapropter GLB æqualis BKG interiori & opposito: Quod in Triangulis fieri non potest, per decimamsextam. Insuper erit per secundam partem huiusce, angulus AHD æqualis angulo BLK, ex eadem parte exterior interiori. Sed idem AHD ipsi BKF ponitur æqualis. Erit igitur BKF ipsi BLK æqualis: Quod per eandem decimamsextam fieri non potest.

Postremò, quum AHD & BKF ponantur duobus rectis æquales: sintq; AHD & BLK duobus rectis æquales, per ultimam partem huius vigesimænonæ: erit BKF æqualis ipsi BLK, repugnante eadem decimasexta.

THEOREMA 21, PROPOSITIO XXX.

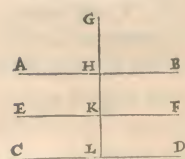
Quæ eidem sunt æquidistantes, eæ quoque inter se sunt æquidistantes.

Sint duæ AB & CD æquidistantes ipsi EF lineæ. Dico & ambas inter se æquidistare.



Ponam GH lineam, secantem tres lineas AB , EF & CD in punctis K , L , M . Et quoniam AB æquidistat EF : erunt anguli alterni BKL & EKL , per primum caput antecedentis, inter se æquales. Itidem, quia CD æquidistat EF : erit EKL , per secundum caput eiusdem, æqualis $CM L$, exterior interiori. Angulus igitur BKL angulo $CM L$, per animi Notionem, æqualis. Qui quum sint alterni, erunt per vigesimaseptimam Propositionem, duæ AB & CD æquidistantes, Quod erat demonstrandum.

POTERAT euentissimè demonstrari ex Recto. Scilicet in AB rectam dimitto, per vndecimam, GH perpendicularem, quæ ipsam AB secet in puncto H : quam GH continuabo donec secet lineam EF in puncto K : & indè vsque ad CD , vt secet ipsam in puncto L .

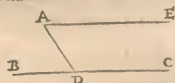


Iam quum GL sit linea vna, comparatis vicissim duobus AB & CD cum EF , adductaq; in probationem vigesima-septima, seu vigesima-octaua: satis constat, per definitionem perpendicularis & per decimanquintam Propositionem, omnes angulos qui ad H , K , L , esse rectos: ac propterea æquales. Quare per antecedentem, duæ AB & CD paralleli, Quod erat demonstrandum.

PROBLEMA 10, PROPOSITIO XXXI.

Per punctum extra lineam rectam signatum, ipsi lineæ parallelum ducere.

Sit punctum A extra lineam BC signatum. Volo per A punctum, ipsi BC lineæ parallelum ducere.



Duco lineam AD , secantem BC in puncto fortuito D : quæ cum ipsa faciat angulos ADB & ADC : Et constituo in puncto A , per vigesimamtertiam, angulum DAE æqualem angulo ADB alterno. Actum erit AE ipsi BC parallelus, per priorem partem vigesima-octauæ, Quod erat faciendum.

HÆC ETIAM poterat Perpendicularis officio absolui.

A puncto enim A duco, per vndecimam, ad rectam BC , perpendicularem AB : Et, per decimam, ad ipsam AD super punctum A erigo perpendicularem AE . Actum manifestum est, per cōuersam rationem Petitionis vltimæ, duas lineas AE & BC non concurrere: quum neutra inclinet in alteram: hoc est, quum ex neutra parte duo anguli interiores sint duobus rectis minores. Neque maiori probatione indiget hæc assertio quàm ipsa Petitio.

Hæc ideò annotaui quòd lineæ Paralleli, ius Recti & Æqualis præcipuo quodam officio conseruent. Quò fit vt Propositiones quæ Parallelorum mentionem hæctenus fecerunt, vsum habeant in Geometricis Demonstrationibus frequentissimum.

THEO

THEOREMA 22, PROPOSITIO XXXII.

Angulus exterior Trianguli, duobus interioribus sibi oppositis est æqualis: Et cuiuslibet Trianguli tres anguli duobus rectis sunt æquales.

Sit Triangulum ABC : Cuius latus BC producat ad punctum D . Dico angulum ACD exteriorem, duobus A & B interioribus simul sumptis esse æqualem: Et tres angulos intimos ipsius Trianguli simul sumptos, duobus rectis esse æquales.

A puncto C ducam, per antecedentem, lineam CE parallelum lateri BA . Tum erunt anguli ECA & BAC , per primam partem vigesimæ nonæ, æquales, utpotè alterni: & per secundam partem eiusdem, anguli ABC & ECD æquales, exterior interiori. Quare totus ACD exterior, ambobus A & B interioribus est æqualis, Quod est prius. Atque eadem erit probatio reliquorum angulorum extrâ sumptorum.

Quum itaq; duo anguli ACB & ACD sint, per decimamtertiam, æquales duobus rectis: erunt tres anguli ABC , BAC , & ACB , æquales duobus rectis, Quod fuit demonstrandum.

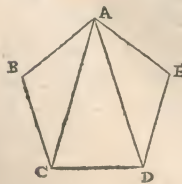
Appendix ex Campano.

Ex hac consequitur, Cuiuslibet Figuræ Multilateræ omnes angulos simul sumptos bis tot rectis angulis esse æquales, quia est ipsa Figura in ordine Multilaterarum.

Verbi gratia, Trigonum est Figurarum prima, quum nulla sit pauciorum laterum: duæ enim lineæ superficiem non concludunt. Trigonum itaque duos complectitur angulos rectos. Vnitas enim quæ ordinem Trigoni notat, bis sumpta facit binarium. Tetrapleuron, seu Quadrilaterum, quod in ordine est secundum, quatuor includit angulos rectos: Binarius enim duplicatus quaternarius efficit. Ordo autem Figurarum è lateribus colligitur. Nam si duo semper latera sustuleris: numerus laterum residuus, ordinem Figuræ ostendet. Vt si quærat Hexagona quota sit Figura: à senario aufer binarium, ac supererit quaternarius. Est itaque Hexagona ordine inter Figuras quarta. Quare octo angulos rectos continet. In summa, ut etiam addamus ad Campanum, quum Triangulum sit Figura prima: ut ordinem cæterarum cognoscamus, initium numerationis faciemus à ternario: ut quaternarius sit pro binario, quinarius pro ternario: sicq; ordinatim.



HÆC AVTEM rectorum angulorum consideratio inde prompta est, quòd omnis multilatera Figura in tot Triangula resolvitur, quota ipsa fuerit à prima. Quadrilatera enim in duo, Pentagona in tria, Hexagona in quatuor Triangula resolvitur: sicq; continenter: sicut ex adscriptis Figuris cernere est.



Verbi causa, In Pentagono $ABCDE$, quum quodlibet trium Triangulorum in quæ resolvitur, duos rectos angulos includat: ipsum Pentagonum sex rectos includet angulos. In idem etiam recidet si dicamus, In omni Figura multilatera omnes angulos simul sumptos tot rectis æquari angulis, quot significantur per numerum angulorum duplicatum, demptis quatuor.

A pun

A puncto enim fortuito intra Figurā signato, quale hic in Hexagono $ABCDEF$, punctum G , si ducantur lineæ rectæ ad quolibet angulorum: erunt in ipsa Figura tot Triangula comprehensa, quot anguli in ipsa fuerint. Horum itaque Triangulorum omnes anguli simul sumpti tot rectis angulis æquantur, per hanc Trigefimamsecundam, quot sunt anguli totius Figuræ duplicati: ut hic sex Triangulorum, sunt anguli duodecim recti. Quumq; omnes anguli punctum G circumstantes, sint ex decimatertia, quatuor rectis æquales: si quatuor ex duodecim auferamus, supererunt in Hexagono sex anguli octo rectis æquales.

li octo rectis æquales.

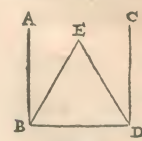
Hinc etiam manifestum est, Figuræ Polygonæ angulos exteriores omnes simul sumptos quatuor rectis æquales esse. Sunt enim interiores cum exterioribus bis tot rectis æquales, quot in Figura anguli fuerint, per decimatertiam. Interiores autem bis tot rectis sunt æquales, quot ipsa Figura habuerit angulos, demptis quatuor, ut modò ostendimus: quapropter exteriores semper quatuor rectis æquales.

Exempli gratia, protrahantur quinque latera Pentagoni $ABCDE$, ad puncta F, G, H, K, L . Eruntq; per decimatertiam, duo anguli qui ad A , æquales duobus rectis: ac per eandem, duo anguli qui ad B , æquales duobus rectis. Sicq; binos quosq; angulos sumendo, ij omnino decem rectis æquabuntur. Demptis itaq; interioribus, qui sex rectis æquantur, ut modò probauimus: erunt exteriores quatuor rectis æquales.

CONSTAT etiam, in omni Pentagono sic constructo ut quodlibet latus duo secet ex reliquis, quinque angulos duobus rectis esse æquales. Sit enim quale proponitur Pentagonum $ABCDE$, ut scilicet AC latus secet latus BE in puncto G : & latus AD secet idem BE in puncto F . Eritq; per præsentem, angulus AFG æqualis duobus angulis B & D , Trianguli BDF : exterior interioribus oppositis. Eadem ratione angulus FGA , duobus angulis C & E , Trianguli CEG , erit æqualis. Atqui duo anguli AFG & FGA cum angulo A , per hanc ipsam, sunt æquales duobus rectis. Sunt igitur quatuor anguli B, C, D, E cum angulo A æquales duobus rectis, Quod erat demonstrandum.

Hæ Campani commentationes quanuis non indignæ cognitu videantur: tamen eius generis inuenta si conquirantur, in immensum excrefcere possent. Figuræ enim Geometricæ tam latum spatiandi campum ingenijs quàm Numeri, immò adeò latiore, exhibent.

EX HOC etiam Theoremate intueri licet, Trianguli constructionem ex duabus lineis super tertiam ad rectos angulos erectis, perfici. Si enim altera in alteram inclinetur: ambæ cum tertia sic includent superficiem Triangulam, ut quod duobus rectis angulis deperit, id in tertio angulo recuperetur. Ut si intelligantur duæ lineæ AB & CD ad rectos angulos super lineam BD erectæ, moueri altera alteram versùs, & coire ad punctum E , ut fiat Triangulum BDE : quod duobus rectis angulis ABD & CDB decrefcit, id tertius angulus E sibi assumit, ut Superficies exurgat. Sic res humanæ comparatæ, ut aliæ in alias cadentes tot specierum varietates componant. Sed nos ad institutum reuertamur, aliàs de ijs lufuri.



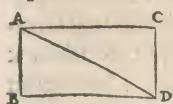
THEOREMA 23, PROPOSITIO XXXIII.

Si duæ rectæ lineæ duas æquales & æquidistantes lineas

ex ad

ex aduerso connectant: erunt & ipsæ inter se æquales & æquidistantes.

Sint duæ lineæ AB & CD , quæ duas AC & BD æquales & æquidistantes connectant ex aduerso in quatuor punctis A, B, C, D . Dico duas AB & CD esse æquales inter se & æquidistantes.



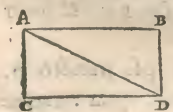
Connectam enim AD . Et quia AC & BD sunt æquales & æquidistantes: erit angulus CAD , per primam partem vigesimæ nonæ, angulo ADB æqualis. Itaque quum duo latera AC & AD , Trianguli ACD : sint æqualia duobus lateribus BD & DA , Trianguli BAD : erit, per quartam, basis AB æqualis basi CD , Quod est prius.

Erunt & per eandem, duo anguli ADC & BAD inter se æquales. Quare quum sint alterni, æquidistabit, per vigesimam septimam, AB ipsi CD , Quod erat demonstrandum.

THEOREMA 24, PROPOSITIO XXXIII.

In omni Parallelogrammo, latera ex aduerso posita, sunt æqualia, & anguli oppositi æquales: Et Dimetiens medium Parallelogrammum diuidit.

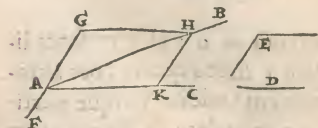
Sit Parallelogrammum $ABCD$, cuius Dimetiens AD . Dico duo latera AB & CD inter se esse æqualia: duoq; AC & CB inter se: Duos item angulos A & B inter se æquales, duosq; B & C inter se. Totam denique Superficiem à Dimetiente AD , mediam diuidi.



Quum enim AB & CD sint æquidistantes: duo alterni anguli BAD & CDA erunt, per vigesimam nonam, æquales. Quumq; AC & BD itidem sint æquidistantes: erunt & duo alterni CAD & BDA æquales, per eandem. Quum itaque duo Triangula ABD & ACD , habeant duos angulos duobus angulis mutuò æquales, scilicet BAD & BDA , ipsis CDA & CAD : & latus AD , cui incumbunt anguli, utrique Triangulo commune: erit, per vigesimam sextam, latus AB lateri CD æquale: latusq; AC lateri BD : & angulus B angulo C æqualis: ob idq; totum Triangulum ABD , toti Triangulo ACD æquale. Quare Theorema omni ex parte constar.

Inter duas lineas interminatas ad angulum datum coniunctas, lineam datam lineam æqualem collocare, quæ cum altera illarum faciat angulum alteri angulo dato æqualem. Oportet autem duos angulos datos duobus rectis esse minores.

Sint duæ lineæ AB & AC , constituentes angulum datum BAC , sed quæ sint interminatæ ex parte extensionis earum: sitq; linea data, D : angulusq; alter datus, E . Volo inter duas AB & AC collocare lineam æqualem lineæ D , quæ cum altera illarum faciat angulum æqualem angulo E dato. Modò tamen duo anguli A & E sint minores duobus rectis. Alioqui fieri non posset Triangulum, per decimam septimam.



Placet ergo ut angulus constituendus sit super lineam AC . Super puncto A facio angulum CAF æqualem angulo E dato, per vigesimam tertiam Propositionem: & ex altera parte produco FA ad punctum G , sic ut AC sit æqualis lineæ D datæ, per secundam: Et per punctum G duco, per trigesimam primam, GH parallelum ipsi AC : quam produco eousque ut concurrat, siue secet AB in puncto H : itidemq; per punctum H , duco HK parallelum ipsi GF , quæ secet lineam AC in

in puncto κ . Dico iam lineam HK constitutam inter duas AB & AC , esse æqualem lineæ D , & angulum κ esse æqualem angulo E dato.

Quoniam enim ex constructione, $AGHK$ est Parallelogrammum: erit KH æqualis AG , per trigessimamquartam Propositionem: quapropter & ipsi D lineæ æqualis, Quod est prius.

Et quoniam AK in duas parallelos FG & KH incidit: erit angulus AKH æqualis angulo FAK , per primam partem vigesimænonæ: quum sint alterni: quapropter & idem κ angulus, ipsi E angulo dato æqualis. Linea igitur HK inter duas AB & AC collocata, & lineæ D æqualis, facit angulum κ æqualem angulo E dato, Quod erat constitutum.

Hoc Problema hîc apponere visum est, aliquando mihi propositum ab artifice quodam Geometriæ non imperito: quod difficilem probationem videretur habere: Tria enim dantur vt Triangulum constituatur: duo anguli, & linea vna: præsertim quum vterque angulus datus, non sit super eadem lineâ constitutus: sic enim facilis esset constructio. Vt si super lineâ AK constituendum Triangulum proponeretur, habens duos angulos duobus angulis datis æquales. Hic verò AK lineâ, arte conquiritur.

THEOREMA 25, PROPOSITIO XXXV.

Quæ super eandem basim Parallelogramma & inter easdem parallelos consistunt, inter se sunt æqualia.

Sint duo Parallelogramma $ABCD$ & $EBCF$, super eandem basim BC , & inter easdem parallelos AF & BC . Dico esse inuicem æqualia.

Aut enim lineâ BE secabit lineam AF citra punctum D , aut in ipso puncto D , aut ultra. Secet igitur primum citra D punctum. Et quia vtrique duarum linearum AD & EF , est æqualis lineâ BC : erunt & ambæ inter se æquales. Dempta igitur ED communi, remanebit AE æqualis DF . Rursus quia, per eandem, AB est æqualis CD : & angulus EAB , per secundam partem vigesimænonæ, æqualis angulo CDF interior exteriori: erunt, per quartam, duo Triangula EBA & $FC D$ inter se æqualia. Quare addita vtrique Figuræ anormi $CDEB$, erunt duo Parallelogramma $ABCD$ & $EBCF$ æqualia.

Nunc autem secet lineâ BE lineam AF in ipso puncto D : eruntq; iisdem rationibus, duo Triangula ABD & DCF æqualia. Quare addito vtrique BCD Triangulo, fient duo Parallelogramma $ABCD$ & $DBCF$ æqualia. Sed & per trigessimamquartam probabitur sic. Duo Triangula ABD & BCD sunt æqualia, ratione Dimetiæntis, per trigessimamquartam: itemq; duo Triangula CDF & BDC æqualia, ob eandem rationem. Duo igitur Triangula ABD & CDF , sunt per communem Notionem, æqualia. Quare vtrique addito Triangulo BCD , fient duo Parallelogramma $ABCD$ & $DBCF$ æqualia.

Secet demum lineâ BE lineam AF præter D punctum in G : vt interfecet lineam CD in puncto H . Quia igitur duæ lineæ AD & GF sunt æquales, per antecedentem & communem Notionem: addita vtrique particula DG , erunt duæ AG & EF æquales: & Triangulum ABG Triangulo DCF æquale: quia vtriusque latera sunt mutuò æqualia, & anguli mutuò æquales, per antecedentem, & per vigesimamnonam. Vtrique ergo addito BCH Triangulo, & ablato DCH ab iisdem: erunt duo $ABCD$ & $GBCF$ Parallelogramma æqualia, Quod erat demonstrandum.

THEO

THEOREMA 26, PROPOSITIO XXXVI.

Quæ super æquales bases Parallelogramma, & inter easdem parallelas consistunt, inter se sunt æqualia.

Sint duo Parallelogramma $ABCD$ & $EFGH$, super æquales bases CD & GH , & inter duas parallelas AF & CH . Dico hæc duo Parallelogramma esse æqualia.

Ducam duas lineas CE & DF . Eritq; per trigessimamtertiam, superficies $CDEF$ æquidistantium laterum. Duæ enim æquidistantes CD & EF inter se sunt æquales: quum utraque sit æqualis GH , & connectantur duabus CE & DF ex oppositis partibus. Quia ergo, per antecedentem, utrunque duorum Parallelogrammorum $ABCD$ & $EFGH$, est æquale Parallelogrammo $CDEF$ (hinc EF basi, illinc CD intellecta): ipsa erunt, per animi Notionem, æqualia, Quod erat demonstrandum.

THEOREMA 27, PROPOSITIO XXXVII.

Triangula super eandem basin & inter easdem parallelas, sunt æqualia.

Sint duo Triangula ABC & DBC , super eandem basin BC , & inter duas parallelas AE & BF constituta. Hæc dico esse æqualia.

Duco, per trigessimamprimam, CG æquidistantem AB : & CH æquidistantem BD . Eruntq; duo Parallelogramma $ABCG$ & $DBCH$ æqualia: ob id, & eorum dimidia. Quare quum ABC Triangulum sit dimidium Parallelogrammi $ABCG$, per trigessimamquartam: & DBC Triangulum sit dimidium Parallelogrammi $DBCH$, per eandem: ipsa Triangula inter se erunt æqualia, Quod fuit demonstrandum.

THEOREMA 28, PROPOSITIO XXXVIII.

Triangula super æquales bases & inter easdem parallelas constituta, sunt æqualia.

Sint duo Triangula ABC & DEF , super bases BC & EF æquales & inter duas parallelas AG & BH . Hæc dico esse æqualia.

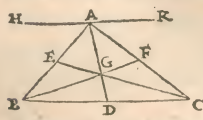
Ducam CK æquidistantem AB : & FL æquidistantem ED . Eruntq; per trigessimamsextam, duo Parallelogramma $ABCK$ & $DEFL$ æqualia: ob idq; ABC & DEF Triangula, eorum dimidia, per trigessimamquartam, æqualia, Quod erat ostendendum.

Ex hac facillimè elicitur hoc Problema,

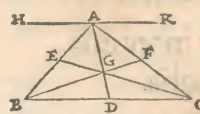
Datum Triangulum in duo Triangula æqualia parti.

Sit enim Triangulum ABC , diuidentum in duo æqualia.

Diuido vnum laterum, & sit ipsum BC , in duo æqualia, per decimam, in puncto D : & connecto DA . Dico duo Triangula ABD & ACD esse æqualia. Quod satis manifestum est ex hac trigesimoctaua: si intellexerimus parallellum ipsi BC ductam per punctum A , ut docet trigessimaprima: qualis hoc loco, ad euidenciam, posita est HK . Duo etiam latera AB & AC æqualiter diuisimus in punctis E & F : ut intelligas cuiuscunque laterum sectio fiat, totum Triangulum per æqualia diuidi. Vbi Triangulorum quoque minorum æqualitas agnoscitur, ex tribus lineis



neis AD , BF , & CE se scindentibus in puncto G . Hoc facit ad diuidenda Triangula in pariter paria: vt in 4, 8, 16, 32.



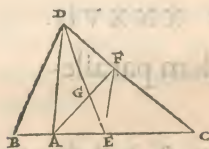
Mechanicè verò diuidetur Triangulū in alias partes, diuiso similiter latere ductisq; lineis ab angulo opposito ad pūcta sectionū. Cuius diuisionis ostensio ad Sextum librum reservatur.

Subijciemus & hoc Problema,

A puncto in vno laterum Trianguli signato lineam ducere, quæ Triangulum bifariam diuidat.

Sit punctum A signatum in latere BC Trianguli BCD . Volo à puncto A ducere lineam quæ diuidat Triangulum BCD in duas partes æquales.

Diuido latus BC bipartitò in puncto E . Tum à puncto A duco ad angulum D oppositum, lineam AD . Cui per punctum E , duco EF parallelum, per trigessimam, quæ secet latus DC in puncto F . Et connecto AF . Dico AF esse quæ diuidit Triangulum BCD in duo æqualia: Scilicet $ABDF$ Quadrilaterum, æquale esse ACF Triangulo.



Connecto ED , secantem AF in puncto G . Et constat ex trigesima octaua, duo Triangula BED & CED esse æqualia, intellecta parallelo ipsi BC , ducta per punctum D : quum sint super æquales bases EB & EC . Duo quoque Triangula DEF & AEF sunt æqualia, per trigesimam septimam: quum sint super eandem basin EF , & inter duas parallelos AD & EF . Dempto itaque communi EGF , erit Triangulum AEG æquale Triangulo DGF : Vtrique igitur ipsorum addito Trapezio $CFGE$, erit ACF Triangulum æquale DEC Triangulo. Atqui DEC est dimidia pars totius Trianguli BCD : quapropter & ACF est dimidia pars eiusdem. Reliqua itaque pars dimidia, erit $ABFD$ Trapezium. Quare linea AF diuidit totum ACD Triangulum æqualiter, Quod facere oportuit.

THEOREMA 29, PROPOSITIO XXXIX.

Triangula æqualia super eandem basin & ad eandem partem erecta, inter duas consistunt parallelos.

Triangula super eandem basin ad eandem partem erecta, dicuntur quum linea ducta à vertice vnus ad verticem alterius, latera eorum non secat.

Sint duo Triangula ABC & DBC super basin BC , quæ verticem ad eandem partem habeant, Et connectatur AD . Dico AD lineam esse parallelum basi BC .

Sin aliter: ducatur parallelus ipsi BC , per trigesimam primam: quæ aut transibit supra AD , aut infra eandem. Si supra, sit ipsa AE : & producat BD , quousque concurrat cum AE in puncto E : connectaturq; EC . Quoniam itaque, per trigesimam septimam, Triangulum ABC est æquale Triangulo EBD , vtrunq; enim inter duas parallelos: & eidem Triangulo ABC positum est æquale Triangulum DBC : erit & idem DBC æquale ipsi EBD , pars toti, Quod esse non potest.

Si verò parallelus duci possit infra AD , vt AF : connexa FC , fiet Triangulum FBC æquale ipsi DBC , pars toti. Non igitur erit alia parallelus basi BC , quàm ipsa AD , Quod erat ostendendum.

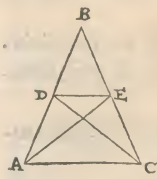
Appendix ex Campano.

Ex hac & antecedente consequitur,

Si linea recta duo Trianguli latera per æqualia secuerit: ipsa erit tertio lateri æquidistans.

Sit

Sit enim Triangulum ABC : & sit linea DE quæ diuidat duo latera AB & AC per duo æqualia in punctis D & E . Hanc dico esse parallelum ipsi AC .



In Quadrilatero $ACED$ ducantur duæ transversæ AE & CD . Intellectaq; per punctum E , parallelo ipsi AB : erit, per trigessimam octauam, Triangulum BDE æquale Triangulo DAE : quum duæ ipsorum bases AD & DB , positæ sint æquales. Rursus intellecta per punctum D , parallelo ipsi BC : erit idem Triangulum BDE æquale Triangulo CED . Erunt itaque, per animi Notionem, duo Triangula EAD & ECD æqualia. Quæ quum super eandem sint basin DE , & in eandem partem erecta: erunt, per hanc trigessimam nonam, inter duas parallelas DE & AC , Quod fuit demonstrandum.

THEOREMA 30, PROPOSITIO XL.

Triangula æqualia super æquales bases, & in eandem partem erecta, inter duas consistunt parallelas.

Sint duo Triangula ABC & DEF æqualia, super duas bases BC & EF æquales, & in eandem partem erecta: & connectatur AD . Dico duo Triangula ABC & DEF inter duas parallelas BF & AD consistere. Hæc est Conuersa trigessimæ octauæ.

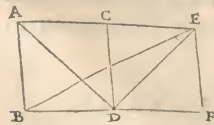
Nam si AD non est ipsi BF parallelus: alia parallelus ducta transibit supra aut infra AD . Si supra, sit ipsa AG : & producat ED ad concursum AG , in punctum G : connectaturq; GF . Eritq; per trigessimam octauam, Triangulum GEF æquale Triangulo ABC . At DEF positum est ipsi ABC æquale. Erit igitur & DEF ipsi GEF æquale, pars totius, quod est absurdum.

Si verò infra AD transeat, sit ipsa AH : & connectatur HF . Ac tum eadem argumentatione probabitur Triangulum HEF , Triangulo DEF esse æquale, pars totius. Quare quum neutra ratione fieri possit: erunt BF & AD paralleli, Quod erat ostendendum.

THEOREMA 31, PROPOSITIO XLI.

Si Parallelogrammum Triangulumq; super eandem basin, & inter duas parallelas consistant: Parallelogrammum Triangulo duplum erit.

Sit Parallelogrammum $ABCD$, & Triangulum BDE , super eandem basin BD , & inter AE & BD parallelas. Dico Parallelogrammum $ABCD$ esse duplum Trianguli BDE .

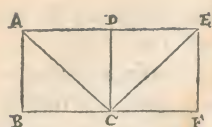


In Parallelogrammo ducam Dimetientem AD : Eritq; per trigessimam septimam, Triangulum ABD æquale Triangulo EBD . Sed Parallelogrammum $ABCD$, per trigessimam quartam, duplum est Trianguli ABD : Quare & duplum Trianguli EBD , Quod erat ostendendum.

Ex hoc satis constat, Si duplicetur basis, Triangulum super hanc erectum, æquale esse ipsi Parallelogrammo, Quale hoc loco est BEF Triangulum. Probabitur & hoc facile quod subieciimus Theorema,

Si parallelogrammum Triangulumq; super æquales bases & inter duas parallelas consistant: Parallelogrammum Triangulo duplum erit.

d 2 Sit



Sit enim Parallelogrammum $ABCD$, & Triangulum ECF , super æquales bases BC & CF . Dico $ABCD$ Parallelogrammum esse duplum Triangulo ECF :

Connectatur ED : & ducatur per punctum C , parallelus ipsi EF , si CD parallelus non fuerit. Ac tum, ex trigesima-sexta, & trigesimaquarta, constabit Propositio.

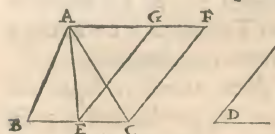
Hanc verò Euclides rectè prætermisit ob facilitatem. Sed & nonnullas similis notionis quas antea expressit, poterat omittere.

PROBLEMA II, PROPOSITIO XLII.

Dato Triangulo æquale Parallelogrammum constituere, habens angulum angulo dato æqualem.

Sit datum Triangulum ABC , datus verò angulus D . Volo ipsi Triangulo ABC æquale Parallelogrammum constituere, habens angulum æqualem angulo D .

Diuido basin BC in duo æqualia, per decimam Propositionem, in puncto E : & connecto AE . Tum per punctum A , duco AF parallelum ipsi BC , per trigesi-



mamprimam: & super punctum E constituo, per vigesimamtertiam, angulum GEC æqualem angulo D dato. Demùm ipsi EG , per punctum C , duco CF parallelum. Dico Parallelogrammum $EFCG$ esse æquale ABC Triangulo.

Quoniam enim, per trigesimamoctauam, Triangulum ABE est æquale Triangulo AEC : erit totum Triangulum ABC duplum Trianguli AEC . At Parallelogrammum $EFCG$, per antecedentem, duplum est eiusdem Trianguli AEC . Quare & ipsum $EFCG$ Parallelogrammum, æquale est Triangulo ABC , habens angulum GEC æqualem angulo D , Quod erat faciendum.

Conuersa quoque huius erit eiusmodi,

Dato Parallelogrammo æquale Triangulum constituere, habens angulum angulo dato æqualem.

Sit datum Parallelogrammum $ABCD$, datus verò angulus E . Volo ipsi $ABCD$ Parallelogrammo constituere Triangulum æquale, habens angulum angulo E æqualem.

Super punctum C , per vigesimamtertiam, constituo angulum DCF , æqualem angulo E : Et CF secet AB protractam, in puncto F . Itidem protraho CD , quæ est ipsi AF parallelus, ad punctum G : ita ut DG sit æqualis ipsi CD . Ac demùm connecto FG . Dico Triangulum CFG esse æquale $ABCD$ Parallelogrammo.

Quum enim, per trigesimamoctauam, totum CFG Triangulum sit duplum CDF Trianguli: & per quadagesimamprimam, Parallelogrammum $ABCD$ sit eiusdem CDF Trianguli duplum: erunt $ABCD$ Parallelogrammum & CFG Triangulum inter se æqualia, Quod erat faciendum.

THEOREMA 32, PROPOSITIO XLIII.

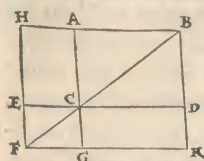
Duorum Parallelogrammorum circa Dimetientem maioris Parallelogrammi consistentium, Supplementa sunt æqualia.

Circa Dimetientem consistunt Parallelogramma, quæ in Dimetiente maioris Parallelogrammi suam habent Dimetientem. Supplementa verò dicuntur quæ cum duobus

duobus Parallelogrammis maius Parallelogrammum perficiunt.

Sint itaque duo Parallelogramma $ABCD$ & $ECFG$: quorum cuspides quæ ad C , sint in eodem puncto C sic coniunctæ ad decussationem, ut utrunque Parallelogrammum per medium diuidatur, Dimetiente BF : sintq; ipsis annexa duo Supplementa $HAEC$ & $CDGK$, perficientia totum Parallelogrammum $BHFK$. Dico $HAEC$ & $CDGK$ Supplementa esse æqualia.

Quum enim Dimetiens BF bipartitò diuidat totum Parallelogrammum $BHFK$ per trigessimamquartam: erunt duo Triangula BFH & BFK æqualia. Quumq; eadem BF bipartitò diuidat $ABCD$ Parallelogrammum, erunt & duo Triangula BCA & BCD æqualia. Atque eadem ratione duo Triangula CFE & CFG æqualia, Quare ablatis duobus Triangulis BCA & CFE à toto Triangulo BFH : itemq; ablatis duobus Triangulis BCD & CFG à toto BFK : remanebunt duæ Superficies $HAEC$ & $CDGK$ inter se æquales, Quod erat ostendendum.



IN HAC Propositione demonstranda, structuram ab alijs aliquantum variaui: non nouitatis studio, sed ut totum negotium Supplementorum & integri Parallelogrammi euidentius exponerem. Vix enim vsquam in toto opere Geometrico occurrir Figuratio magis fecunda quam hæc Gnomica: hoc est, quæ vno Parallelogrammo & Gnoma constatur. Ut hoc loco, si $ABCD$ Parallelogrammum sumamus, Figura illa $HFC D$, quæ cum $ABCD$ perficit totum $BHFK$ Parallelogrammum, Gnoma seu Gnomon vocatur. Si verò sumatur $ECFG$ Parallelogrammum: erit Gnomon $HBCG$ Figura. Nam hîc Gnomonis explicandi locus est maximè opportunus: licet Euclides ad secundum librum distulerit.

Hanc ego Figuram mysticam soleo vocare: Ex ea enim, velut ex locupletissimo promptuario, innumerabiles exeunt Demonstrationes. Quod cum magna voluptate perspiciet qui in re Geometrica seriò se exercebit.

Cui verò magis placebit aliorum constructio, is primùm sibi deliniet $BHFK$ Parallelogrammum: tum ducat ED parallelum: inde AG alteram parallelum: atque eam demonstrationem sequatur quam modò tradidimus.

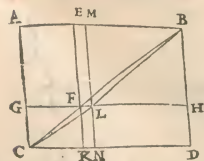
Huius Conuersam sic instituemus.

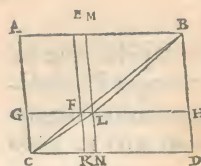
Si Parallelogrammum in duo Supplementa æqualia & duo quantacunq; Complementa diuisum fuerit: duorum Complementorum Dimetientes in continuum erunt, & vna totius Parallelogrammi Dimetiens.

Complementa hîc vocauimus, duo Parallelogramma quæ cum duobus Supplementis totum Parallelogrammum constituunt. Sic enim ob vocum affinitatem non ineptè dici possunt: tum ne sine nomine essent, tum ut faciliùs caperentur, à Supplementis nominatim distincta.

Sit itaque Parallelogrammum $ABCD$, Cuius duo Supplementa æqualia, $A EFG$ & $FHD K$: duo verò Complementa $GFCK$ & $EBFH$, quorum Dimetientes CF & FB . Dico CFB esse lineam vnâ, & totius $ABCD$ Parallelogrammi Dimetientem.

Si enim non sit eiusmodi, erit alia totius Parallelogrammi Dimetiens: Sitq; ipsa CLB , infra Dimetientes CF & FB educta, secans GH in puncto L : Et per ipsum L punctum, ducatur MLN , per trigessimamprimam Propositionem, ipsi AC Parallelus: Sintq; in toto Parallelogrammo $ABCD$, duo Supplementa $AMGL$ & $LHND$. Atque hæc, per Directam huius, erunt inter se æqualia: quum sint circa Dimetientem CLB : Sed $A EFG$ Supplementum positum est æquale Supplemento $FHD K$. Quum itaque $FHD K$ maius sit ipso $LHND$: erit $A EFG$ maius ipso $AMGL$,
d 3 pars





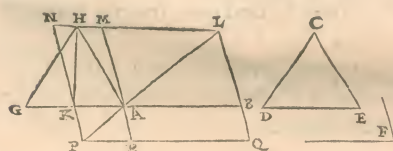
pars toto, quod est absurdum. Iisdem rationibus probabitur Dimetiens educi non posse supra Dimetientes CF & FB . Quare CFB vna est Dimetiens totius Parallelogrammi, Quod erat probandum.

PROBLEMA 12, PROPOSITIO XLIII.

Super data recta linea, dato Triangulo æquale Parallelogrammum constituere, habens angulum angulo dato æqualem.

Sit data linea AB , datumq; Triangulum CDE , datus verò angulus F . Volo super AB constituere Parallelogrammum æquale Triangulo CDE , habens angulū equalem angulo F . Differt hæc à quadragesimasecunda: quòd hîc data sit linea, illîc nulla.

Produco itaque BA ad punctum G : & pono AG æqualem lateri DE , Trianguli, dati: Et per vigesimamtertiam, ad punctum A facio angulum GAH æqualem angulo E : Et per secundam, facio AH æqualem lateri EC . Connexaq; GH , erit Triangulum AGH , per quartam Propositionem, æquale Triangulo CDE dato. Diuido postmodum AG per æqualia in puncto K , per decimam: & connecto HK . Et per punctum H , duco HL Parallelum ipsi GB , per trigesimamprimam. Inde ad punctum A constituo angulum GAM æqualem angulo F dato, per vigesimamtertiam, ut AM fecerit HL in puncto M . Tum per punctum K , duco KN Parallelum & æqualem ipsi AM . Et connexa HN , facio Parallelogrammum $AKMN$. Quod, per trigesimamoctauam & quadragesimamprimam, erit æquale Triangulo AGH , ob idq;



Triangulo CDE dato. Cæterum duco BL Parallelum ipsi AM : quam coniungo cum NM protracta, in puncto L . A quo educo Dimetientem LA : quam produco donec iungatur cum NK protracta, in puncto P . Et duco PQ Parallelū & æqualem ipsi KB .

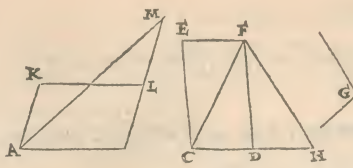
Academum connexis AR & BQ , perficio totum Parallelogrammum $NLPQ$, constans quatuor Parallelogrammis. Inter quæ Supplementum AQ , per antecedentem, æquale est Supplemento AN : ob id & Triangulo dato CDE . Quare quum linea data AB sit vnum laterum ipsius AQ Parallelogrammi: & angulus BAR sit, per decimamquintā, angulo GAL æqualis: ob idq; angulo F dato: constat totum Problema.

$HA NC$ Campani descriptionem apposui: ut ipsius tædiosam diligentiam, ac minimè necessariam ostenderemus. Nihil enim opus fuit Triangulo AGH . Tantum fuit constituendum Parallelogrammum $AKMN$ Triangulo CDE æquale, habens angulum æqualem angulo F , ex quadragesimasecunda: sicut rectè hîc Theon astruxit. Propositiones enim Geometricæ aliæ alijs præeunt: non ut ipsarum constructio, sed vsus tantum repetatur: ne linearum multitudo intellectum conturbet potius quàm iuuet.

Huius autem Conuerfa sic erit,

Super data recta linea, dato Parallelogrammo Triangulum æquale constituere, habens angulum angulo dato æqualem.

Sit data linea AB , datumq; Parallelogrammum $CDEF$: datus verò angulus G . Volo super AB constituere Triangulum, ipsi $CDEF$ Parallelogrammo æquale, habens angulum æqualem angulo G . Duco CH Dimetientem: & protracta CD ad H punctum, pono DH æqualem CD : Et connecto HF . Eritq; Triangulum CHF , per quadragesimamprimam, æquale Parallelogrammo $CDEF$: quum basis sit dupla. Iam,



Iam, per directam huius, super AB constituo Parallelogrammum $ABKL$, æquale Triangulo CHF , habens angulum ABL æqualem angulo G dato. Tum protracta BL , pono LM æqualem BL : Ac demùm connecto AM . Dico iam Triangulum ABM , super AB esse constitutum

quale volumus.

Est enim Triangulum ABM æquale Parallelogrammo $ABKL$, per quadragesimamprimam: quum sint inter duas Parallelos BM & AK , sitq; dupla basis Trianguli. Sed $ABLK$, ex constructione, est æquale Triangulo CHF : & CHF æquale $CDEF$, per ipsam quadragesimamprimam. Quare, per animi Notionem, Triangulum ABM æquale est Parallelogrammo $CDEF$, habens angulum ABM , æqualem angulo G dato, Quod erat faciendum.

Poterat quoque in hæc verba proponi Problema,

Inter duas Parallelos interminatas, dato Rectilineo æquale Parallelogrammum constituere, habens angulum angulo dato æqualem.

Vbi animaduertendum, inter duas parallelos datas Parallelogrammum constituere, non esse difficilius quàm super data recta linea. Nam ubicunque datur linea recta, datur ipsius Parallelus interminata. intelligo, ad Parallelogrammum constituendum.

Hoc volui adijcere, vt Geometriæ candidati, Propositiones variè inuentas & enuntiatas conciliare, & ad vsum accommodare discant.

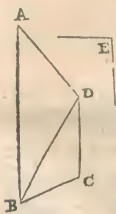
HANC NOSTRAM poteramus in locum sequentis substituere, quum esset locupletior. Datur enim linea: præter id quod sequens ipsa vacare videtur, vt quæ ex antecedente satis patèret: nisi fortè quod Rectilinea in Triangula resolvere monet. Ob id, à nonnullis omiſsa est, vt à Campano. Eam tamen è loco non mouimus. Nihil enim in præsens de nostro in ordinem redigere constituimus.

PROBLEMA 13, PROPOSITIO XLV.

Dato Rectilineo æquale Parallelogrammum constituere, habens angulum angulo dato æqualem.

Sit datum Rectilineum $ABCD$, datus verò angulus E . Volo ipsi $ABCD$ Rectilineo æquale Parallelogrammum construere, habens angulum æqualem angulo E .

Resoluo $ABCD$, quum sit Quadrilaterum, in duo Triangula ABD & BCD : Ipsiq; ABD , per quadragesimamsecundam, constituo æquale Parallelogrammum



$FGHK$, habens angulum FKH , angulo E æqualem. Et continuata KH in punctum M , vt sit angulus GHM , per vigesimamnonam, æqualis angulo K : constituo super GH , per antecedentem, Parallelogrammum $GHLM$, æquale Triangulo BCD , habens angulum GHM iam creatum. Et quoniam linea KM , ex posito, est linea vna: & angulus MHG æqualis angulo FGH alterno, per primam partem vigesimænonæ: sed ipse MHG cum LGH duobus rectis

æqualis, per vltimam partem eiusdem: erit FGH angulus cum ipso LGH , duobus rectis æqualis. Itaque, per decimamquartam, FL est linea vna. Quumq; FG & KH sint, per trigesimalamtertiam, æquales: itemq; GL & HM , per eandem, æquales: erit tota FL , toti KM æqualis: & per trigesimalamtertiam, FK & LM æquales. Est igitur totum Quadrilaterum $FKLM$, Parallelogrammum. Quare quum angulus K sit æqualis angulo E : constat Propositio.

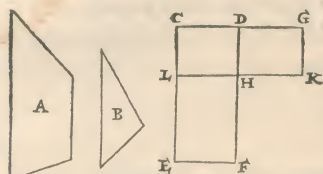
d 4 Ex iam

Ex iam demonstratis emerget hoc Problema,

Propositis duabus Superficiebus rectilineis inæqualibus, excessum maioris supra minorem cognoscere.

Sint duæ Superficies rectilineæ A & B , quarum maior sit A . Volo scire quantus sit excessus ipsius A supra B .

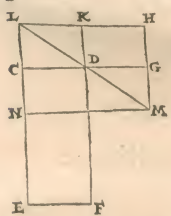
Constituo, per quadragesimamquartam, Parallelogrammum $CDEF$, æquale ipsi A Rectilineo, habens angulum $CDEF$, verbi gratia, rectum. Et protracta CD in G punctum, factaq; DG æquali ipsi CD : constituo, per quadragesimamquartam, super DG , Parallelogrammum $DGHK$, æquale ipsi B Rectilineo, habens angulum DGK rectum. Et protraho KH , donec secet CE in puncto L . Dico $HLEF$ esse excessum Rectilinei A supra Rectilineum B .



Ac primum $CGKL$ vnum esse Parallelogrammum, clarius est quàm quod demonstrari debeat.

Quoniam igitur CD & DG , exposito, sunt æquales: & utraque ipsi KL Parallelus: erunt, per trigessimamsextam, duo Parallelogramma CH & DK æqualia. Et quoniam DK positum est æquale ipsi B Rectilineo: erit & CH ipsi B Rectilineo, æquale. Quare, quum totum CF Parallelogrammum, sit æquale ipsi A Rectilineo sitq; LF excessus ipsius CF supra DK : erit, per communem Notionem, LF excessus A Rectilinei Supra B Rectilineum, Quod erat manifestandum.

ALITER facilius. Maneat $CDEF$ Parallelogrammum æquale ipsi A Rectilineo. Et protracta CD ad G punctum, constituatur super DG , Parallelogrammum $DGHK$ ipsi B Rectilineo æquale: productisq; EC & HK , vt concurrant ad L punctum, ducatur per D punctum, Dimetiens LD , secans HG protractam, in puncto M . Et ducatur MN Parallelus ipsi HL , secans EL in puncto N : vt sit $HLMN$ Parallelogrammum. Dico NF esse excessum Rectilinei A supra B Rectilineum.



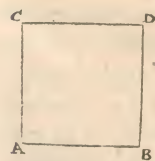
Quum enim HD sit æquale B Rectilineo, sintq; HD & DN Supplementa, per quadragesimamtertiam, æqualia: erit quoque DN ipsi B Rectilineo æquale. Quo ablato à CF Parallelogrammo (quod positum fuit ipsi A æquale) remanebit NF excessus A supra B , Quod erat faciendum.

PROBLEMA 14, PROPOSITIO XLVI.

Ex data recta linea Quadratum describere.

Sit data linea AB , ex qua sit describendum Quadratum.

A punctis A & B , excito, per vndecimam, duas perpendiculares AC & BD : quarum vtranque, per tertiam, facio æqualem ipsi AB . Eruntq; , per vltimam partem vigesimæoctauæ, AC & BD Paralleli. Et connecto CD : quæ per trigessimamtertiam, erit æqualis & Parallelus ipsi AB . Quumq; duo anguli A & B sint recti: erunt & duo oppositi D & C recti, per vltimam partem vigesimænonæ: vel, si mauis, per trigessimamquartam. Quare, ex definitione Quadrati, erit $ABCD$ Quadratum.

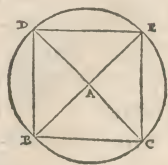


ALITER, Erigatur AC perpendicularis ad AB : eidemq; ponatur æqualis. Et à puncto C ducatur CD parallelus & æqualis eidem AB : & connectatur DB : Quæ, per trigessimamtertiam, erit æqualis & Parallelus ipsi AC . Quumq; per vltimam partem vigesimænonæ, omnes anguli sint recti: erit $ABCD$ Quadratum, Quod faciendum fuit.

ANIM

ANIMADVERTENDUM, veram Quadrati constructionem è Centro, atque ob id, è Circulo pendere. In ijs enim quæ perfecta sunt, punctum ubique primum est ad quod omnia referuntur. Sic igitur producemus Quadratum, non data linea.

Ex Centro A, Circuli BCDE, educatur duæ lineæ AB & AC ad peripheriam, facientes angulum qui ad A rectum: & earum utraque protrahatur in puncta D & E peripheriæ. Ac tum connectantur BC, CD, DE, & EB. Quum igitur quatuor anguli qui ad A sint recti, per decimam quintam: & omnes lineæ æquales quæ illos comprehendunt, utpote à centro ad peripheriam: erunt, per quintam & trigessimam secundam, in quatuor Triangulis integrum Parallelogrammum componentibus, bini quique anguli, qui ad B, C, D, E, semirecti: unde quatuor integri recti: & per quartam, quatuor bases æquales. Quare BCDE Quadratum.

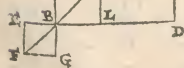


ATQVE eam ob causam præcipuam, tam mystica semper habita est Decussatio: ea præsertim quæ ad rectos fit angulos, & undique æqualitatem ostendit: qualis in Quadrato & Circulo conspicua est. Nam quod Quadratum facimus ex ductu lineæ rectæ in seipsam, id sensus iudicio facimus, Artis ductu. Per centrum enim lineas duci, atque in ambitum, non in latum incedere par est. Punctum quippe illud fecundissimum, lineas infinitas circumquaque procreat. Neque quisquam mihi obijciat, Quadratos Numeros: qui ex ductu lateris in seipsum producuntur. Diverſa est enim Discretorum, & Continuorum consideratio, quam hîc explicandi non est locus. Hoc tamen non nego, Artem nobis omni ratione amplectendam esse: quæ Naturam sibi soli cognitam, patefacit similitudine & imitatione. Hæc enim quæ facit, affabrè quidem facit: sed quò perfectius, eò occultius.

ANIMADVERTE etiam, Quadrato quatuor inesse Semidiametros, Hexagono sex, Octagono octo: Trigono tres, Pentagono quinque, Heptagono septem, Ennagono novem: sicq; Figuris continenter, pro angulorum numero. De Perfectis semper intelligo: scilicet de æquilateris & æquiangulis. Atque in paribus, Diametri terminantur ab angulo per centrum, ad angulum oppositum: in imparibus autem, imperfecta quadam ratione, ab angulo per centrum, ad latus oppositum. In Circulo utrunque inest. Diametri enim & ad latera & ad angulos educi intelliguntur: quum sit ipse, si hûc cogitatio pertingere potest, infinitorum angulorum, & infinitorum laterum. Quanto igitur plures in Figura fuerint Semidiametri, ea tanto propius ad Circulum accedit, tantoq; perfectior. Et tamen quanto pauciores habet, tanto maiorem usum habere videtur. Trianguli enim usus quàm Quadrati frequentior: Quadrati rursus quàm Pentagoni: Ut in his rerum humanarum imaginem cernamus. Minorum enim obsequio maiores utuntur. Sed de his aliàs plurà.

Quæ circa Diametrum Quadrati Parallelogramma, sua latera Quadrati lateribus æquidistantia habuerint, Quadrata esse oportet.

Sit Quadratum ABCD, cuius Diameter BC: sintq; duo Parallelogramma BEFG & BHKL sicposita, ut latus EB sit æquidistans lateri AC: & latus EF lateri CD: itidem latus HK eidem AC æquidistans, & KL ipsi AB: & Diameter CB protracta, diuidat hæc duo Parallelogramma per medium. Dico BEFG & BHKL esse Quadrata.



Quoniam enim angulus A est rectus, duoq; anguli ABC & ACB, per quintam, æquales: erit horum uterque, per trigessimam secundam, semirectus. Quapropter & angulus EBF, per vigesimam nonam, semirectus.

semirectus

semirectus: quum CF cadat in duas Parallelos AC & EB : ob idq; per eandem, angulus BFG semirectus. Et quia latus EB , Trianguli EBF , per trigessimamquartam, est æquale lateri FG Trianguli BFG : & BF vtrique commune: erit, per quartam, basis EF æqualis basi BG . Quumq; recta AG connectat duas parallelos AC & FG , & angulus A sit rectus: erit & alternus C rectus, per vigesimamnonam. Itaque, per trigessimamsecundam, erit angulus FBG semirectus: & per sextam, duo latera FG & BG æqualia. Erit igitur totus angulus EBG rectus: ac propterea, per trigessimamquartam, totus F & totus E rectus: & quatuor latera Parallelogrammi $EBFG$, æqualia. Quare ipsum erit Quadratum. Eadem erit probatio de $BHKL$ Parallelogrammo, Quod fuit constitutum.

Huic Propositioni hunc locum assignauimus: quam tamen poteramus statim post trigessimamquartam subijcere: Sed ad Quadrati mentionem reponere placuit, non vltra: quanuis Euclides ad quartam Secundi distulerit.

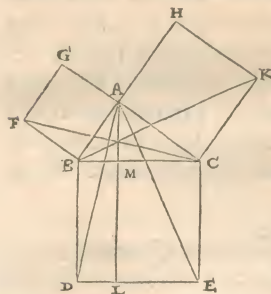
THEOREMA 33, PROPOSITIO XLVII,

Campano 46.

In rectangulis Triangulis, Quadratum quod ex latere angulum rectum subtendente fit, Quadratis quæ ex duobus angulum rectum continentibus lateribus fiunt, est æquale.

Sit Triangulum ABC , cuius angulus A rectus. Dico Quadratum lateris BC , Quadratis duorum laterum AB & AC esse æquale.

Describam ex BC latere, secundum doctrinam antecedentis, Quadratum $BCDE$, simul ex AB & AC , duo Quadrata $ABFG$ & $ACKH$. Eritq; BH , ex decimaquarta Propositione, linea vna, & CG itidem vna: quum omnes anguli qui ad A sint recti. Tum ab angulo A recto demittam ad latus DE maximi Quadrati, lineam AL parallelum lateri BD , secantem BC in puncto M . Et ab eodem angulo A ducam duas AD & AE : itemq; à duobus reliquis angulis ABC & ACB , duas BK & CF .



Quoniam itaque super basin BF , & inter duas parallelos CG & BF , constituuntur $ABFG$ Parallelogrammum & BFC Triangulum: erit $ABFG$, per quadragesimamprimam, duplum ipsius BFC . At idem BFC , per quartam, æquale est ABD Triangulo: quum sint BF & BC latera vnus, æqualia AB & BD lateribus alterius: & angulus B huius, æqualis angulo B illius: constat enim vterque ex angulo recto & angulo ABC comuni. Est igitur Quadratum $ABFG$, duplum Trianguli ABD . Sed & Parallelogrammum $BDLM$ duplum est, per quadragesimamprimam, eiusdem ABD Trianguli: sunt enim super eandem basin BD , & inter duas parallelos BD & AL . Quare, per communem Notionem, Quadratum $ABFG$ æquale est Parallelogrammo $BDLM$.

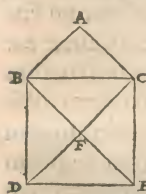
Atque eadem argumentatione, inductis duobus BCK & AEC Triangulis, probabimus Quadratum $ACKH$ esse æquale Parallelogrammo $LMEC$. Quare quum Quadratum $BCDE$ compleatur duobus Parallelogrammis $BDLM$ & $LMEC$: ipsum erit æquale duobus Quadratis $ABFG$ & $ACKH$, Quod erat demonstrandum.

HÆC

HÆC EST illa tam celebris Demonstratio à Pythagora Philosopho peruestigata: ob quam præ gaudio bouem Dæmonibus immolauit, si Heroni, Proclo, Lycio, & Vitruuio credimus. Quod tamen apud multos fidem non habet. Summa enim religione vir ille à cæde animantium abstinuit. Vtut est, profectò mirabile inuentum est, & verè Dei cuiusdam donum. In cuius ratiocinatione planè Philosophica, libet paulum expatiari: vt intueamur vnde hoc Theorema desumptum sit: quòque consilio, ad huius inuestigationem sese docti homines exercuerint.

Imprimis totius meditationis occasio à Recto & Æquali profecta est: Ex quibus omnes ferè Geometricas probationes originem sumere diximus. Quod ex Triangulo Iosceles Rectangulo, quod dimidium est Quadrati, manifestum faciemus.

Sit enim Iosceles Rectangulum ABC , cuius angulus A rectus. Dico Quadratum lateris BC , æquum esse Quadratis duorum laterum AB & AC . Describo ex BC Quadratum $BCDE$: Cuius duco duas Diametros BE & CD , secantes inter se in puncto F . Quumq; duo latera BC & BD Trianguli BCD , sint æqualia: erunt, per quintam, duo anguli BCD & BDC æquales: ob idq; ambo semirecti, per trigessimamsecundam: quum sit angulus CBD rectus. Eadem ratione erunt duo anguli CBE & CEB Trianguli BEC , semirecti: Quapropter duo latera BF & CF Trianguli BCF , per sextam, æqualia. Rursus quum duo anguli ABC & ACB Trianguli

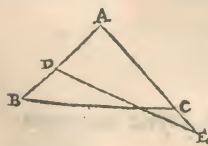


ABC , sint semirecti, per quintam & trigessimamsecundam: & basis BC vtrique Triangulorum ABC & BCF communis: erunt duo latera AB & AC , æqualia duobus lateribus FB & FC , per vigesimamsextam. Est igitur $ABFC$ quatuor laterum æqualium, & quatuor angulorum rectorum: quapropter à Definitione, Quadratum. Jam verò quum duo anguli FCE & FEC Trianguli CEF , sint æquales duobus angulis FBC & FCB ipsius Trianguli CBF , vtpote omnes semirecti: & basis BC æqualis basi EC : erunt duo Triangula BCF & FEC æqualia. Ex communi itaque Notione, erit totum Triangulum BEC , æquale Quadrato $ABFC$. Atqui Triangulum BEC , per trigessimamquartam, dimidium est Quadrati $BCDE$. Et Quadratum igitur $ABFC$ dimidium est eiusdem $BCDE$. Si itaque bis sumatur $ABFC$, ratione duorum laterum AB & AC : duo Quadrata æquabuntur Quadrato $BCDE$, Quod erat demonstrandum.

HÆC Demonstratio amplior quidem: Sed tamen tota Figuræ specie facilis: adeò Rectum & Æquale sese, vbicunque sint, manifesta ostendunt.

At in Scalenis Rectangulis excogitanda fuit alia Demonstrationis ratio. Nam deficiente laterum æqualitate, deficiunt quæ ab hac pendent, æqualitates Quadratorum & Triangulorū. Erat quidem in promptu hæc ratiocinatio, Cuiuslibet Trianguli Rectanguli, duo reliqui anguli à recto sunt æquales duobus semirectis, per trigessimamsecundam. Conuenit igitur vt Quadrata duorum laterum ipsos subtendentium, quāuis inæqualium, tantum efficiant, quantum si esset vterq; semirectus: quum sint bases æquales. Quod enim vni laterum inæqualium decrescit, alteri accrescit: vt æqualitas potentię compensetur (Potentia linear tanta est, quantum est ipsius Quadratum). Ac rationi consentaneum est, vt potentia lateris rectum angulum subtendentis, æqualis sit duabus laterum quæ duos semirectos subtendunt, potentijs. Magnitudo enim angulorum, magnitudinem laterum oppositorum metitur: & contrà.

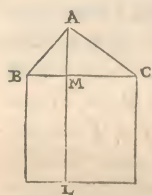
Quod vt clariùs exponamus, In duobus Triangulis Rectangulis ABC & ADE , quorum ABC sit Iosceles, sed ADE Scalenum: notum est, ex vulgata illa trigessimamsecunda, duos angulos semirectos ABC & ACB , Trianguli ABC , æquales esse duobus ADE & AED Trianguli AED , simul sumptis. Sed non propterea notū est, si Quadratū basis BC sit æquale Quadratis duorū laterū AB & AC , continuo Quadratū basis DE æquale esse Quadratis duorum laterum AD & AE : etiamsi duæ bases BC & ED sint æquales. Id verò Pythagoras probauit



probavit generali Demonstratione. Quæ certè difficillima fuit inuentu, sicut in disquirendo experti sumus. Nam quum simili studio incenderemur, multa quidem in hanc rem meditati sumus: scopum tamē alia ratione attingere non potuimus quàm per proportionēs: idq; ex Figura Gnomonica. Sed nos huius fontis vberimi ritulos aliquot confectemur.

REPETITA igitur prima constructione, iucundum est intueri quonam pacto Rectum & Æqualitas hīc suum ius tueantur. Nam tametsi AB & AC latera sint inæqualia, ob idq; anguli ABC & ACB inæquales: officio tamen perpendicularis AM , pulchra fit permutatio: vt intelligantur omnia in integro remanere. Angelus enim CAM , angulo ABC : angulusq; BAM angulo ACM perpetuò est æqualis, Quod sic demonstratur:

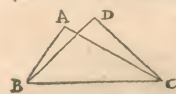
Angelus BAC Trianguli ABC , ponitur rectus: angulusq; AMC Trianguli ACM , rectus: & angulus C vtrique Triangulo communis. Itaque, per trigessimamsecundam & communem sententiam, reliquus CAM angulus, reliquo ABC est æqualis. Rursus quum vterque angulus qui ad M sit rectus, & angulus B probatus sit æqualis angulo CAM : consequitur vt reliquus BAM , reliquo ACM sit æqualis, Quod erat demonstrandum.



Vides vt perpendicularis æqualitatem testetur non laterum singulorum, sed potentiarū ipsorum. Hoc est, si Quadratum linearū BC ad duo Quadrata æqualia reducatur: hæc erunt æqualia Quadratis duorum laterum AB & AC . Vbi etiam animaduertendum, eā linearū vt præstent mutuas operas, officij permutatione. Nam ex subtensa BC fiunt duo latera Triangulorum aduentitiorum ABM & ACM : Et ex duobus lateribus primi Trianguli ABC , rectum angulum continentibus, fiunt duæ subtensæ. Sed quonam modo fiat ea reductio Quadratorum ad æqualitatem, placet hīc demonstrare.

Duo Quadrata inæqualia ad duo Quadrata æqualia reducere.

Sint Quadrata duarum linearum AB & AC , inæqualia. Volo hæc duo reducere ad duo Quadrata æqualia. Ambas lineas constituo ad angulum rectum BAC : & connecto BC . Tum super duobus terminis B & C facio duos angulos semirectos (id verò fiet erectis perpendicularibus, ac diuiso vtroque angulorum rectorum per



æqualia: vt docet nona huius): sintq; anguli BCD & CBD semirecti: & concurrant duæ linearū BD & CD ad punctum D . Dico duo Quadrata laterum BD & CD , esse æqualia duobus Quadratis laterum AB & AC .

Sunt enim, per sextam, duo latera DB & DC æqualia: & angulus D , per trigessimamsecundam, rectus: Quapropter Quadratum lateris BC , æquale est Quadratis duorum laterum DB & DC , per hanc quadragesimamseptimam. Sed & æquale Quadratis duorum AB & AC , per eandem. Quare, per animi Notionem, Quadrata duorum DB & DC sunt æqualia duorum AB & AC Quadratis, Quod erat faciendum.

Ex hoc habetur & hoc Theorema,

Si duo Triangula rectangula æquales subtensas habuerint: Quadrata duorum reliquorum laterum vnius, sunt æqualia Quadratis duorum reliquorum alterius.

Quod satis patet ex postrema constructione.

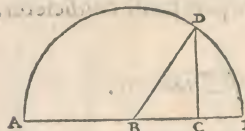
Sed & indidem hoc exhibit Problema,

Propositis duabus lineis inæqualibus, potentiam maioris supra minorem cognoscere.

Potent

Potentiam lineæ tantam esse diximus, quantum est ipsius Quadratum:

Sint itaque duæ lineæ inæquales AB & BC , quarum maior AB . Volo scire quantum possit AB supra BC . Hoc est, volo reperire Quadratum, quod cum Quadrato ipsius BC , sit æquale Quadrato lineæ.



Statuo AB & BC in continuum: positoq; Centro in puncto continuationis B , describo Semicirculum ADE secundum Quantitatem maioris AB . Tum super C puncto, erigo perpendicularem: quam produco donec attingat peripheriam in puncto D : Et connecto BD . Dico Quadratum lineæ CD esse excessum potentie lineæ AB supra BC .

Quoniam enim angulus C Trianguli BCD , est rectus: Quadratum subtensæ BD , æquale est Quadratis duorum laterum BC & CD : igitur & ipsdem est æquale Quadrato lineæ AB . Quare Quadratum lineæ BC tanto minus est Quadrato lineæ AB , quantum est Quadratum lineæ CD , Quod erat inuestigandum.

Hanc Theon subnectit decimæ tertie Decimi: eamq; probat ex prima Quarti & trigesima Tertij: quam tamen ex hac sola Pythagorica demonstrari vides.

Ex hoc etiam habetur ratio inueniendi tertij lateris Trianguli Rectanguli, duobus quibuscumque cognitis. Quod clarius est, quam quod probandum sit.

Nunc autem hoc Theorema quonam pacto ad Numeros accommodetur, obiter ostendemus. In Numeris itaque locum præcipue habet, quum maximus ad medium fuerit, ut 5 ad 4 : scilicet in proportionem, quam vocant, sesquiquarta: & medium ad minimum ut 4 ad 3 : hoc est, in proportionem sesquitertia. Eiusmodi sunt tres $3, 4, 5$: tresq; $6, 8, 10$: & $12, 16, 20$: sicq; continuo progressu. Quadratum enim 20 est 400 , ac tantundem efficiunt 144 cum 256 , quæ sunt Quadrata ex 12 & 16 .

Sed & cognito minimo laterum in Numeris, Scalenum Rectangulum sic absolues. Dimidium cogniti duc in se: à producto aufert unitatem: habebis alterum latus. Huic adde binarium: fiet maximus latus, seu subtensæ. Ut, sit minimum latus 10 : Horum dimidium duc in se: sunt 25 : à quibus ablata unitate, supersunt 24 , medium latus: his adde binarium: sunt 26 , subtensæ. Horum enim Quadratum 676 : Et tantundem efficiunt 100 & 576 , Quadrata ex 10 & 24 .

Isoſcelia verò Rectangula ex Numeris non conficiuntur. In quo id dignum consideratione est, quod in Geometricis est euidentius & Demonstrationi promptius, id in Numeris veritatem non habere. Nunquam enim duo Quadrati Numeri æquales Quadratum Numerum componunt. Atque eam ob causam, lateris Quadrati ad Diametrum proportio incognita. Est enim Diameter radix seu latus duorum Quadratorum æqualium in vnum Quadratum iunctorum: ob id, irrationale: hoc est, ut in Arithmetis dicitur, radix Surda. Ut radix $2, 8, 32$: sicq; continenter, alternis Numeris Progressionum intermissis.

Illud quoque non omitam, hoc Theorema Pythagoricum non ex Triangulo, sed ex Parallelogrammo Rectangulo esse depromptum. Quod & Numerorum affinitas ostendit. Nullum enim Numeris cum Triangulis commercium: neque Superficies, per Numeros absoluitur, nisi multiplicatione. Multiplicatio verò, minimum, quadrilatera est. In Geometricis etiam Superficiebus, Triangula ut dimidia Parallelogrammorum considerari debent. Sic itaque proponi poterat Theorema.

In Parallelogrammis Rectangulis, Quadratum quod à Dimetiente fit, æquale est duorum quæ subtendit laterum, Quadratis.

Quia tamen simpliciora sunt Triangula, atque ob id tractabiliora: eorum nobis officium accersimus. Sed de his aliàs.

e Ex

Ex hoc etiam satis euidens est illud,

Data Diametro, componere Quadratum cuius est Diameter.

Constitutis enim super duobus terminis lineæ, duobus angulis semirectis, & perfecto Triangulo: habebitur dimidium Quadrati: Cuius altera pars faciliè conficietur. Inde manifestum est & illud,

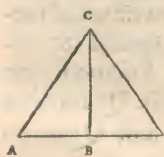
Quadratum Diametri, duplum est Quadrati cuius ipsa est Diameter.

Quod nulla indiget probatione.

THEOREMA 34, PROPOSITIO XLVIII.

Si quod ab vno laterum Trianguli fit Quadratum, æquale fuerit duorum reliquorum Quadratis: angulus ab illo latere subtensus, rectus erit.

Sit Triangulum ABC : sitq; Quadratum lateris AC æquale Quadratis duorum laterum AB & BC . Dico angulum B oppositum AC lateri, esse rectum. Conuersa antecedentis,

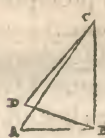


A puncto B ad contrariam partem ipsi A puncto, educo perpendicularem BD , per vndecimam: quam pono æqualem AB , per secundam: Et connecto DC .

Et quoniam angulus CBD rectus est: Quadratum lateris CD , per antecedentem, æquale est Quadratis duorum laterum BC & BD : quapropter & Quadratis duorum BC & BA . Est igitur ipsum CD latus ipsi AC lateri æquale, per animi Notionem: quum vtriusque Quadrata sint æqualia. Triangulum itaque ABC , æquale est & æquilaterum Triangulo CBD . Quare angulus ABC , per octauam, angulo CBD æqualis: ob idq; rectus, Quod erat demonstrandum.

PROBABIMVS & ab impossibili, Conuersarum more.

Si enim Quadratum lateris AC est æquale Quadratis duorum AB & BC , neque angulus B sit rectus: erit maior aut minor recto. Ac prius sit maior recto, fiatq; angulus DBC rectus, educta perpendiculari BD , per vndecimam: quæ ponatur



æqualis lateri AB , per secundam: Et connectatur CD . Eritq; per directam huius, Quadratum ipsius CD æquale Quadratis duorum BD & BC : quapropter & Quadratis duorum BA & BC . Erit igitur basis CD æqualis basi CA : quum ipsarum Quadrata sint æqualia: Quod est contra vigesimamquartam Propositionem. Nam quum sit angulus ABC maior angulo DBC , sintq; duo latera AB & BC duobus lateribus DB & BC mutuò æqualia: erit basis CA maior basi CD . Eadem ratione probauimus angulum totum B , non esse recto minorem. Est igitur rectus, Quod erat demonstrandum.

Sed probationes quæ affirmatè concludunt, digniores sunt ijs quæ ab impossibili.

Ex Campano.

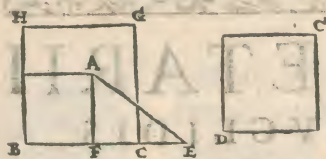
Propositis duobus Quadratis, alteri illorum Gnomonem reliquo æqualem adiungere.

Licet intempestiuè Campanus Gnomonis constructionem hic apposuisset, quum Euclides Gnomonem posterius definiat: eius tamen Propositionem loco non mutauimus: præsertim quum Gnomonem iam antea in Quadragesimatertia definierimus.

Sint itaque duo Quadrata AB & CD : quorum alteri, vt ipsi AB , sit adiungendus Gnomon æqualis reliquo CD .

Protra

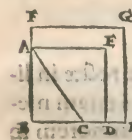
Protrahatur latus BF Quadrati AB in continuum: & ponatur FE æqualis lateri ipsius CD: Et connectatur EA. Eritq; Quadratum ipsius EA, æquale duobus Quadratis EF & FA Trianguli EFA, per Quadragesimamseptimam. Sed Quadratum ipsius EF, est æquale ipsi CD Quadrato. Et Quadratum lateris FA, est ipsum



AB Quadratum. Est igitur Quadratum ipsius AE æquale duobus CD & AB Quadratis. At verò EF & FA latera sunt, per vigesimam primi, longiora latere AE. Sed FA est æquale FB. Erunt ergo EF & FB, ipso AE longiora. Quapropter tota BE longior est quàm AE. Secetur igitur ad ipsius æqualitatem in puncto C: fiatq; BC æqualis ipsi AE: Et describatur Quadratum BCGH ex ipsa BC: quod erit æquale Quadrato ipsius AE. Sed Quadratum AE duobus Quadratis AB & BC est æquale. Et Quadratum igitur BCGH æquale est eisdem. Quare, quum Quadratum ipsius BC componatur ex Quadrato AB & Gnomone FGAN: erit Gnomon ipsi CD Quadrato æqualis, Quod fuit faciendum.

SED multò expeditius sic poterat confici.

Sint duo Quadrata, quorum latera sint AB & BC. Volo Quadrato lineæ AB adiungere Gnomonem æqualem Quadrato lineæ BC.



Constituo ambas ad angulum rectum ABC. Et connecto AC. Descriptoq; Quadrato lateris AB, quod sit ABDE, protrahe BA ad punctum F: ut sit BF æqualis AC. Et describo Quadratum BFGH: quod erit æquale Quadrato ipsius AC, quum lineæ sint æquales: ac propterea æquale Quadratis duorum AB & BC. Quum itaque BFGH Quadratum, compleatur ipso Quadrato ABDE & Gnomonem FEGD: erit ipse Gnomon æqualis Quadrato lineæ BC, Quod erat faciendum.

Libri Primi Geometricorum Elementorum





IACOBI PELETARII CENOMANI IN EVCLIDIS

ELEMENTA GEOMETRICA

DEMONSTRATIONVM

LIBER SECVNDVS.

Parallelogrammum Rectangulum.



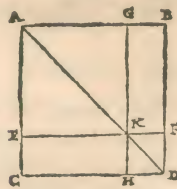
Omnē Parallelogrammum Rectangulum, sub duobus rectum angulum constituentibus rectis lineis dicitur contineri.

Parallelogrammum Rectangulum fit ex ductu lineæ rectæ in lineam rectam, idq; instar Numerorum : facilitatis, vt diximus, gratia. Vbi etiam meminisse oportet. Ducere maiorem lineam in minorem, idem esse ac si minorem in maiorem ducamus : sicut 3 in 4, & 4 in 3, idem efficiunt.

Gnomon.

In Parallelogrammis, alterutrum Parallelogrammorum quæ circa Dimetientem consistunt cum duobus Supplementis, Gnomon vocatur.

Hoc iam antè in quadragesimatertia Primi explicauimus. Si enim in Figura adscripta, Parallelogrammum HF cum duobus Supplementis CK & KB sumamus, efficietur Gnomon EDG : seu, vt alij designant, $CDGK$: quod vnum & idem est. Quòd si Parallelogrammum EG cum isdem Supplementis sumpserimus, fiet Gnomon $FACK$. Deest itaque Gnomoni alterutrum interiorum Parallelogrammorum quæ Dimetiens media secar : quæq; Complementa in quadragesimatertia Primi nominauimus.



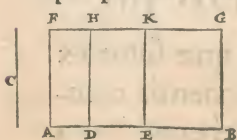
THEOREMA PRIMVM, PROPOSITIO PRIMA.



I duarum linearum altera in partes aliquot secta fuerit: quod ex ductu alterius in alteram fit, æquum est iis quæ ab infecta & quolibet segmento Rectangulis, producuntur.

Sint duæ linearæ AB & C : quarum AB secta sit in partes AD , DE & EB . Dico id quod fit ex ductu C in AB , æquale esse Rectangulis quæ fiunt ex ductu eiusdem C in AD , DE , & EB segmenta.

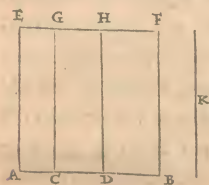
Super puncta A & B , erigam lineas perpendiculares AF & BG , per vndecimam Primi: & ponam vtranq; æqualem ipsi C : Et connexa FG , complebo Parallelogrammum Rectangulum $ABFG$. Quod quidem ex linea AF (ea est linea C) in AB producitur. Tum à punctis sectionum D & E ducam, per trigessimamprimam Primi, ipsis AF & BG , parallelos DH & EK : quarum vtraque est æqualis C , quum vtraque sit æqualis AF , per trigessimamquartam Primi. Et quoniam Rectangulum $ADFH$ producitur ex segmento AD in AF (hoc est in C), & $DEHK$ ex segmento DE in eandem C : ac denique $EBKG$ ex segmento EB in eam ipsam: atq; hæc tria totum Parallelogrammum $ABFG$ componunt: manifesta est Propositio.



THEOREMA 2, PROPOSITIO II.

Si recta linea vtcunque secta fuerit: quæ sub tota & quolibet segmentorum Rectangula continentur, æqualia sunt ei quod ex tota fit Quadrato.

Sit linea AB diuisa in AC , CD , & DB segmenta. Dico Rectangula quæ fiunt ex segmentis in ipsam AB simul sumpta, æqualia esse Quadrato eiusdem AB .



Quod manifestum erit, descripto Quadrato $ABEF$, ductisq; lineis CG & DH , quæ sint lateribus Quadrati paralleli & æquales.

ALITER. Sumatur K æqualis AB . Eritq; per antecedentem, quod fit ex K in totam AB , æquale ijs quæ fiunt ex eadem K in quælibet segmenta ipsius AB . Et quia quod ex K in AB , æquale est ei quod ex AB in seipsam: & quæ ex K in quælibet segmenta ipsius AB fiunt, æqualia ijs quæ ex AB in suas partes, propterea quod K & AB sunt æquales: constat Propositio.

THEOREMA 3, PROPOSITIO III.

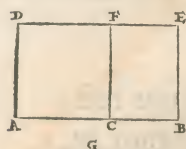
Si in duo segmenta fuerit linea diuisa: quod ex tota in alterutrum segmentorum fit Rectangulum, æquale est ei quod ex segmentis fit Rectangulo, eiq; quod ex priori segmento fit Quadrato.

c 3

Sit

Sit linea AB diuisa in AC & CB segmenta. Dico Rectangulum ex tota AB in AC segmentum, æquale esse Rectangulo quod ex AC in CB , eiq; quod ex AC in seipsum, simul sumptis.

Describatur ex AC , Quadratum $ACDF$: Et producta DF ad E punctum, connexaq; BE parallelo, perficiatur Parallelogrammum $ABDE$. Quod quum constet ipso Quadrato $ACDF$ & Parallelogrammo FB , quod est ex CB in AC : manifesta est Propositio.



ALITER, ex prima huius. Sumatur G æqualis AC . Et quoniã totum BD Parallelogrammum fit ex G in AB , quum sint AD & G æquales: & CD Quadratum ex eadem G in AC segmenta (lineæ enim æquales sunt) & deniq; FB Parallelogrammum, ex eadem G in CB segmentum: atque his æquale est quod fit ex G in AB , per primam huius: erit quod fit ex AC in AB æquale ei quod fit ex AC in BC , & in seipsum, Quod erat demonstrandum.

THEOREMA 4, PROPOSITIO IIII.

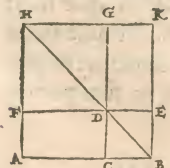
Si recta linea secetur vtcunque: Quadrata quæ fiunt ex segmentis cum eo quod bis sub ipsis segmentis comprehenditur Rectangulo, æqualia sunt ei quod à tota fit Quadrato.

Consectarium.

Quæ circa Dimetientem Quadrati consistunt Parallelogramma, Quadrata esse oportet.

Sit recta linea AB , secta in partes AC & CB . Dico duo Quadrata ex AC & CB cum eo quod bis sub ipsis AC & CB continetur Rectangulo, esse æqualia Quadrato totius AB .

Ex altera partium, vt ex CB , describo Quadratum $CBDE$: & productis lateribus ED & CD , ponam DF & DG æqualia ipsi AC : & perficiam Quadratum $DFGH$: Quod constat esse Quadratum ipsius AC . Tum connexa FA , erit CF Parallelogrammum Rectangulum, per trigessimamtertiam & trigessimamquartam Primi. Quod est ex CB in AC : quum CD sit ipsi CB æqualis. Similiter constituo alterum Parallelogrammum Rectangulum DK , productis BE & HG , quæ concurrant ad punctum K : quod eadem ratione fit ex CB in AC . Quoniam ergo duo anguli DFH & DFA sunt recti: erit per decimamquartam primi, AH linea vna: & eadem ratione HK linea vna, & BK etiam vna. Et quia CK ipsi CB est æqualis: &



AF eidem CB , quia æqualis ipsi EB : item HF & HG ipsi AC : erunt duæ AH & HK toti AB æquales, per secundam animi Notionem. Itidem & BK eidem AB æqualis. Quum itaque quatuor anguli A , B , H , K sint recti, erit $ABHK$ Quadratum: & nonnisi ipsius AB , quum sit vnum laterum. Quare, quum ipsum compleatur Quadratis duarum AC & CB , duobusq; Supplementis quæ sub CB & AC comprehenduntur: constat Propositio.

HANC Demonstrationem, meo iudicio, expeditiorem reddidi, quàm sit ea quæ per Diametros & angulos semirectos asruitur verbosius. Nihil est enim quod magis oneret memoriam, quàm longè ducta Demonstratio: in ijs præsertim Propositionibus quæ vel ipsa constructio manifestas reddit. Diametrum tamen apposuimus: vt quouismodo cõstitutio innotesceret. Scilicet descripto Quadrato BDE , & eius Diametro

metro producta, dum concurrat cum AF prius erecta, ad punctum H : tum perfectum $ABHK$ Parallelogrammum probabitur esse Quadratum: & $DFGH$ itidem Quadratum, per semirectos angulos Triangulorum. Quod ego ratiocinationi cuiusque relinquo.

ALITER. Sit linea AB , ut prius, diuisa in AC & CB . Eritq; per secundam huius, quod fit ex tota AB in se, æquale ei quod fit ex ipsa in AC & CB . At ex ipsa in AC tantum fit, quantum ex AC in se & ex AC in BC , per tertiam huius. Item ex ipsa AB tota in BC , tantum fit, quantum ex CB in se & ex CB in AC , per eandem. Quod igitur fit ex tota AB in se, æquum est ijs quæ fiunt ex AC in se & in CB , & ex CB in se & in AC , Quod erat demonstrandum.

Hæc secunda Demonstratio est Campani. Sed, ut ipse subiicit, ex ea non constat Confectarium. Quod nos quum iam probauerimus ad quadragesimam sextam Primi: hoc ipsum Theorema sic facile ostendemus.

Ex ipsa AB diuisa in AC & CB ut prius, constituatur Quadratum $ABDE$, cuius Diameter BD : ducatur Parallelus CF , secans Diametrum in puncto G : itemq; altera Parallelus HK per idem punctum G . Actum, ex Demonstratione nostra, erunt KF & CH Quadrata, eaq; ipsorum AC & CB : ut satis constat ex constructione. Præterea duo AG & GE Supplementa, sunt quæ fiunt ex AC in BC . Quare quum hæc quatuor perficiant totum $ABDE$ Quadratum: manifesta est Propositio.

Hæc etiam proponi potest in hæc verba,

Si dua linea inæquales fuerint: quod fit ex maiori in seipsam, æquum est ei quod ex minori in seipsam cum duobus quæ fiunt ex excessu in maiorem & ex eodem in minorem, Parallelogrammis.

Scilicet AB linea excedat AC lineam, portione CB . Constabit Quadratum maioris AB , Quadrato minoris AC cum eo quod fit ex CB in AB (ut est in posteriore Figura Parallelogrammum AH), & altero quod fit ex eodem CB in minorem AC , quod est CE Parallelogrammum.

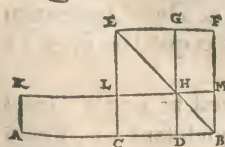
In quo rerum imaginem iucundè contemplari subit. Nempè quod deest linea AC , ducetur in ipsam: hoc est, CB in AC : sed & quod superest ipsi AB (id ipsum verò est CB) ducetur in ipsam AB : sicq; ex duabus vna fiet potentia.

THEOREMA 5, PROPOSITIO V.

Si recta linea secetur in duo æqualia duoq; inæqualia: Rectangulum comprehensum sub inæqualibus segmentis totius vnà cum Quadrato quod à medio segmentorum, æquale est ei quod à dimidia fit Quadrato.

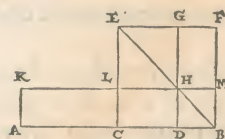
Sit recta linea AB æqualiter diuisa in puncto C , & inæqualiter in puncto D . Dico Quadratum CB , esse æquale ei quod fit ex AD in DB cum Quadrato CD .

Describam ex CB Quadratum $CBEF$, cum Diametro BE : & ducam DC ipsi BF parallelum, secantem Diametrum in puncto H , & EF in puncto G . Et per punctum H ducam KM æqualem & æquidistantem AB , per trigessimam primam Primi, secantem BF in puncto M , & CE in puncto L : Et connectam AK æquidistantem CE . Eruntq; per Confectarium antecedentis, seu per ea quæ probauimus ad quadragesimam sextam Primi, LC & DM



c 4 Quad

Quadrata: LG quidem lineæ CD : & DM , lineæ DB . Et quia DH est æqualis DB : erit AH id quod fit ex ductu AD in DB . Et quia, per quadragesimamtertiam Primi, duo Supplementa CH & HF sunt æqualia: addito Parallelogrammo DM utriq; erit CM æquale DF . Quum itaque AL sit æquale CM , per trigessimamsextam Primi: erit & ipsum æquale DF . Gnomon igitur $CBGH$ æqualis est AH Parallelogrammo. Sed Gnomon ipse cum Quadrato LG , constituit Quadratum dimidiæ AB . Quare AH Parallelogrammum & Quadratū LG , sunt æqualia Quadrato dimidiæ AB , Quod fuit demonstrandum.

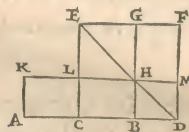


THEOREMA 6, PROPOSITIO VI.

Si recta linea in duo æqualia secetur, alia verò ei linea addatur in continuum: quod ex tota iam composita in eam quæ addita est, cum Quadrato quod fit à dimidia, æquum est ei quod à dimidia cum addita tanquàm ab vna, fit Quadrato.

Sit linea AB æqualiter diuisa in puncto C : eiq; addita BD . Dico id quod fit ex composita AD in additam BD cum Quadrato dimidiæ CB , esse æquale Quadrato CD .

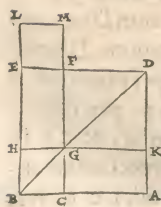
Describam ex CD , Quadratum $CDEF$, cuius sit Diameter ED . Et ducam BC æqualem & æquidistantem DF , quæ secet Diametrum in puncto H . Et per ipsum H punctum, ducam KM æqualem & æquidistantem AD , secantem DF in puncto M , & CE in puncto L : Et connectam AK æquidistantem CL .



Iam per Constructarium quartæ huius, utrunque Parallelogrammum LG & BM est Quadratum: hoc quidem ex BD , illud verò ex CB : & propterea DM æqualis BD : totumq; AM Parallelogrammum, est quod fit ex AD in BD . Quia ergo, per trigessimamsextam Primi, AL est æquale CH : & per quadragesimamtertiam eiusdem, Supplementum CH æquale Supplemento HF : erit & AL eidem HF æquale. Quare Gnomon $CDGH$, toti AM Parallelogrammo æqualis. Sed Gnomon $CDGH$ cum Quadrato LG , constituit Quadratum lineæ CD . Quare AM Parallelogrammum cum Quadrato LG , æquale est Quadrato lineæ CD , Quod fuit demonstrandum.

THEOREMA 7, PROPOSITIO VII.

Si recta linea secetur in duas quantascunq; partes: Quadratum quod à tota cum Quadrato quod ab vna partium, æquale est ei quod bis producit ex tota in ipsam partem Rectangulo, cum eo quod ex altera parte fit Quadrato.



Sit linea AB , fortuito diuisa in puncto C . Dico Quadratum totius AB cum Quadrato BC , æquale esse ei quod bis fit ex AB in BC cum Quadrato AC .

Describatur Quadratum totius AB , quod sit $ABDE$, cuius Diameter BD : ducaturq; CF æqualis & æquidistans BE , secans Diametrum in puncto G : & per G punctum, HK æqualis & æquidistans AB .

Quia

Quia igitur Quadratum $A E$ cum Quadrato $C H$, est æquale Quadrato $K F$ cum duobus Parallelogrammis $A H$ & $C E$, patet Propositio.

Si quis manifestius perspicere velit, faciat $H M$ Parallelogrammum æquale $H A$ Parallelogrammo, ut $E M$ sit Quadratum $B C$. Ac tunc omnes apparebunt Propositionis particulae.

THEOREMA 8. PROPOSITIO VIII.

Si recta linea secetur utcumque: Rectangulum comprehensum quater sub tota & vno segmentorum cum eo quod ex altero segmento fit Quadrato, æquale est ei quod à tota cum priori segmento tanquam ab una describitur, Quadrato.

Recta linea $A B$ secetur utcumque in puncto C . Dico id quod quater sub $A B$ & $C B$ continetur Rectangulum vna cum Quadrato quod ex $A C$, æquale esse ei quod ex $A B$ & $B C$ tanquam ex vnica linea, Quadrato.

Producatur $A B$ in D punctum, & sit $B D$ æqualis $C B$: Et ex $A D$ describatur Quadratum $A D E F$. Tum ducta Diametro $D E$, lineisq; $C G$ & $B H$ parallelis & æqualibus ipsi $D F$, quæ secant Diametrum in punctis K & L : & per ipsa K & L puncta, ductis $M O$ & $P R$ parallelis & æqualibus ipsi $D A$: Erit, per Constructum quarta, huius vnaquæque Superficierum $R G$, $N Q$, $B M$, & $C P$ quadrata. Quumq; $B D$ & $B L$ latera Quadrati $B M$, sint æqualia $C B$ & $B L$ lateribus Parallelogrammi $C L$: erit & ipsum $C L$ Quadratum: similiq; ratione $L P$ Quadratum: ob idq; quatuor Quadrata componentia, $C P$ Quadratum, inter se æqualia. Et quia totus Gnomon $A D G K$ circumstans Quadratum $R G$, est, per trigesimal sextam, & quadragesimam tertiam Primi, quadruplus ei quod ex $A B$ in $B D$ fit Rectangulo, quia quadruplus ad Superficiem $A L$: constat Propositio: Scilicet $A L$ sumptum quater cum Quadrato $R G$, esse Quadrato $A D E F$ æquale.

De Gnomone autem euentius perspicemus, si aduerterimus Superficiem mutilam $A D K R$, esse duplam ad superficiem $A L$. Duo enim Triangula $K N L$ & $L B D$, sunt æqualia Quadrato $C L$. Idemq; de altera parte $D F G K$ sit iudicium. Quod nos si prolixius exponeremus, ingenium studiosorum obrueremus potius quam instrueremus. Ex enimfigurationes Gnomonum eiusmodi sunt, ut sese ob concinnitatem sponte elucident.

Campanus hoc Theorema proponit in hæc verba,

Si linea in duas partes secetur, atque ad ipsam addatur recta linea vni segmentorum æqualis: quod ex tota composita in seipsam fiet, æquale erit illi quæ ex ductu prioris lineæ in ipsam additam quater, & ei quod ex altero segmento fit Quadrato.

Id vero in idem recidit cum priore. Est enim $B D$ ipsi $C B$ perpetuo æqualis. Sed tamen eiusmodi varietates inutiles non sunt: quippe quæ ingenium ad horum Theorematum praxin & vsum instructius reddant. Neque incommodè fecerit qui se in Propositionibus Geometricis, huius præsertim Secundi libri variandis, immò & notis exogitandis exerceant. Cuiusmodi satis multas adscribere possemus. Sed ea priuatim à Geometra sunt examinanda, non inter reliquas collocanda. Tædium est enim hæc Theoremata congerere quæ cum Numeris communicant. Eamq; ob causam, nec sine iudicio, paucis fuit contentus Euclides.

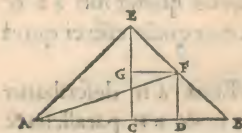
THEO

THEOREMA 9, PROPOSITIO IX.

Si recta linea in duo æqualia duoq; inæqualia diuidatur: quæ ab inæqualibus totius segmentis fiunt Quadrata, dupla sunt eius quod à dimidia cum eo quod à medio segmentorum fit Quadrato.

Sit linea AB diuisa æqualiter in puncto C , & inæqualiter in D . Dico duo Quadrata quæ ex AD & DB , dupla esse duorum quæ ex AC & CD , Quadratorum.

Super punctum C erigo perpendicularem CE , æqualem vtrique AC & CB : Et connecto EA & EB . Eruntq;, per quintam & trigesimalsecundam Primi, duo anguli A & B semirecti: & vterque qui ad E , semirectus: sicq; totus E rectus. Erigo itaque DF perpendicularem super AB , secantem EB in puncto F . Et erit, per eandem trigesimalsecundam, angulus BFD semirectus: quapropter DB & DF latera, per sextam Primi, æqualia. Iam à puncto F ducō FG æquidistantem, ob idq; æqualem CD . Et erit, per secundam partem vigesimalnonæ, & per trigesimalsecundam Primi, vterque angulus qui ad G , rectus, & angulus EEG semirectus: est enim TEG semirectus. Quapropter EG & FG latera, per sextam Primi, æqualia. Tandem connecto AF : Et quoniam Quadratum EF , per quadragesimalseptimam Primi, æquale est Quadratis duarum EG & GF : ipsum erit duplum ad Quadratum CF : ob idq; ad Quadratum CD . Eadem ratione erit Quadratum EA duplum ad Quadratum AC . Quumq; Quadratum AF sit æquale Quadratis AE & EF , per eandem: ipsum erit duplum ad Quadrata AC & CD . Sed & idem Quadratum AF æquale est Quadratis AD & DF . Et Quadrata igitur AD & DF dupla sunt ad Quadrata AC & CD . Et quia Quadratum DB est æquale Quadrato DF erunt duo Quadrata AD & DB , dupla ad duo AC & CD , Quod erat demonstrandum.



IN HAC. contueri licet quantam vim habeant Rectum & Æquale. Quatuor enim Triangulis Isoscelibus Rectangulis, id est, ex quatuor Semiquadratis, tota nititur probatio.

THEOREMA 10, PROPOSITIO X.

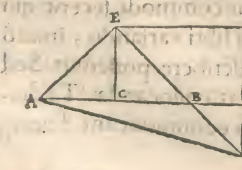
Si recta linea secetur in duo æqualia, apponatur autem ei alia in continuum: quod ex tota iam composita, quodq; ex apposita ambo fiunt Quadrata, dupla sunt amborum, eius scilicet quod ex dimidia eiusq; quod ex dimidia cum apposita, Quadratorum.

Sit recta linea AB æqualiter diuisa in puncto C : eiq; in continuum apposita BD . Dico id quod fit ex AD Quadratum cum Quadrato quod ex BD , duplum esse eius quod ex AC cum eo quod ex CD Quadrato.

Erigo CE perpendicularem super AB , & æqualem vtrique linearum AC & CB : Et connecto AE , & EB . Eruntq;, per quintam & trigesimalsecundam Primi, vterque angulus A & B : item vterque qui ad E , semirectus: totusq; E rectus.

A puncto itaque E , ducō EF æqualem, & æquidistantem CD : & connecto FD , quam protraheo donec concurrat cum linea EB protrahæ ad punctum G : Tum connecto AG .

Et quia angulus ECB est rectus: erit, per ultimam partem vigesimalnonæ Primi, angulus CEG rectus. Quum igitur

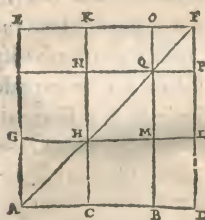


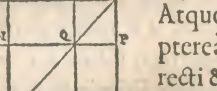
tur angulus $C E B$ sit semirectus: erit & $F E G$ semirectus. Quumq; $F D$, per trigessimamtertiam Primi, sit æquidistans $E C$: erit, per trigessimamquartam eiusdem, angulus qui ad F , rectus: sicq; angulus $E G F$, per trigessimamsecundam, semirectus: quia $F E G$ semirectus. Et, per eandem, angulus $D B G$ semirectus: quum angulus $B D G$, per decimamtertiam eiusdem, sit rectus. Duo igitur latera $E F$ & $F G$, per sextam eiusdem, sunt æqualia: itidemq; duo $B D$ & $D G$ æqualia. Quapropter Quadratum $E G$, per quadragessimamseptimam Primi, duplum est ad Quadratum $E F$: ob id, & ad Quadratum $C D$. Quadratum item $A E$, per eandem, duplum est ad Quadratum $A C$. Quumq; Quadratum $A G$, per eandem, sit æquale duobus Quadratis $A E$ & $E G$, similiter & duobus Quadratis $A D$ & $D G$: sitq; Quadratum $D G$ æquale Quadrato $B D$: erunt duo Quadrata $A D$ & $D G$ (ea sunt $A D$ & $B D$) dupla duobus Quadratis $A C$ & $C D$, Quod fuit demonstrandum.

A L I T E R. Sit linea AB bifariam diuisa in c , eiq; in continuum adiuncta BD . Dico Quadratum quod ex AD cum Quadrato quod ex BD , duplum esse ad vtrun- que, & quod ex AC & quod ex CD fit Quadratum.

Ex tota AD describo Quadratum $ADEF$. Et super dimidia AC describo Quadratum $ACGH$: protractisq; GH & CH ad sectiones duorum laterum EF & DF , describo $HLKF$: quod erit Quadratum ipsius CD : vt constat ducta Diametro AHF , ex Constructio quarta huius & ex trigesimaquarta Primi: est enim KF æqualis CD . Factis etiam HM & HN utrique AC & CB æqualibus, protrahe MO & NP , sese scindentes ad rectos angulos in puncto Q . Quarum vtraque secet latera Quadrati $ADEF$ in O & P punctis.

Iam verò nihil attinet probare HQ esse Quadratum ipsius AC , quum sit Quadratum CB : sicut QE Quadratum ipsius BD : neque HP Parallelogrammum, æquale esse vtrique Supplementorum EH & HD : quum HO sit eis communiter




 æquale: Denique NO & QL Supplementa esse æqualia. Atque etiam manifesta sunt hæc ex ipsa Figura specie: propterea quod omnes anguli qui circa Diametrum, sunt semi-recti & latera æqualia. Diligenter itaque aduertentes quibus partibus componatur Quadratum HF , quod est ex CD : sic ratiocinabimur. Quum totum DE Quadratum integretur duobus AH & HF Quadratis & duobus Supplementis EH & HD : probandum nobis est, hæc ipsa Supplementa cum Quadrato QF (quod est ex BD) esse æqualia duobus ipsis AH & HF Quadratis. Tum enim probauerimus hæc duo Quadrata AH & HF bis sumpta, toti Quadrato DE cum Quadrato QF esse æqualia, quod initio suscepimus. Sic autem erit Demonstratio.

Supplementum EH æquale est Parallelogrammo HF : Et Quadratum AH cum Supplemento minori NO , æquum est alteri Supplemento HD , per primam animi Notionem, toties sumptam quoties opus fuerit. Duo igitur Supplementa EH & HD , sunt æqualia Quadrato AH & Gnomoni $KHLQ$. Si ergo ad utrunque accedat Quadratum QF : erunt duo Supplementa EH & HD cum Quadrato QF , æqualia Quadrato AH , Gnomoni $KHLQ$, & Quadrato QF . Sed hæc tria constituunt duo Quadrata AH & HF . Sunt igitur duo Supplementa EH & HD cum Quadrato QF , æqualia duobus Quadratis AH & HF , Quod erat secundarium. Quare duo Quadrata AH & HF bis sumpta, toti Quadrato DE cum Quadrato QF sunt æqualia, Quod erat probandum.

Hæc Demonstratio longiorem quidem habet deductionem, sed nihilominus acutam: Quam nos ex Figura Gnomonica venati sumus: Ex qua huiusce libri Secundi, immo totius ferè Geometriæ Demonstrationes insigniores hauriuntur.

PROB

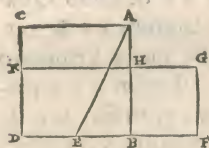
PROBLEMA I, PROPOSITIO XI.

Datam rectam lineam sic secare, ut quod ex tota & altero segmentorum fit Rectangulum, æquale sit ei quod ex altero segmento fit Quadrato.

Sit linea AB sic diuidenda, ut quod ex tota in vnum segmentorum fiet Rectangulum, æquale sit ei quod ex altero segmento fiet Quadrato.

Describo ex AB, Quadratum ABCD. Cuius latus BD diuido per æqualia in E: & connecto AE: Et protraho EB ad F punctum, ut sit EF æqualis AE: Et ex BF, portione exteriori, describo Quadratum BFGH: ut BH latus resectum sit ex AB. Dico AB sic sectam esse in puncto H, ut quod sit ex AB in AH, æquale sit Quadrato quod ex HB.

Protraho GH ad K, punctum lateris CD, æqualem & æquidistantem AC: Eritq; HC Rectangulum ex AH in AB: quod probabitur æquale BFGH Quadrato.



Quoniam enim linea BD diuisa est per æqualia in E, atque eidem addita linea BF: erit, per sextam huius, quod sit ex DF in BF cum Quadrato EB, æquale Quadrato EF: quapropter & Quadrato EA: ob idq; per quadragesimamseptimam Primi, Quadratis AB & EB. Ablato igitur vtrunque Quadrato EB, erit quod sit ex DF in BF (quod est Parallelogrammum FK)

æquale Quadrato lineæ AB. Dempto igitur vtrunque Parallelogrammo BK, supererit Quadratum BG æquale Parallelogrammo HC, Quod fuit demonstrandum.

OBSERVABIMVS hoc Problema nequaquam, ut cæteras huius Secundi Libri Propositiones, ad Numeros reduci posse. Quum enim posuerimus latus DB (id est AB) atque in duo æqualia diuiserimus, ut in E puncto: linea AE superueniens rationem conturbat: hoc est, nullam habet rationem ad latus AB nominatam: ob idq; per Numeros minimè explicabilem. Nam quum Quadratum ipsius AE sit æquale duobus Quadratis AB & EB, per quadragesimamseptimam Primi: & EB sit dimidium AB: erit ipsum AE irrationale. Ut enim duo Quadrati Numeri æquales Quadratum Numerum iuncti efficere non possunt: ita nec duo Quadrati Numeri Quadratum Numerum efficient, quorum alter sit Quadratum dimidiæ radice alterius.

Id nos exemplo notum faciemus. Quadra 8, fiunt 64: hæc geminata nunquam Quadratum Numerum constituent. Ita, diuidantur 8 in duo æqualia, sient 4. Certè Quadrata duorum 8 & 4, quæ sunt 64 & 16, Quadratum Numerum efficere non possunt: faciunt enim 80. Hoc verò esset necessarium, ut hoc Problema in Numeris locum haberet. At verò per Numeros Irrationales figurabitur in hunc modum.

Sint 8 sic diuidenda, ut quod ex toto in alteram fiet partium, æquale sit ei quod ex reliqua parte fiet Quadrato.

Duco 8 in se, fiunt 64, hoc est, Quadratum ABCD. Diuido 8 in duo æqualia, fiunt 4, ut DE aut EB linea. Duco 4 in se, fiunt 16: hæc addo ad 64, proueniunt 80: quorum radix est $\sqrt{80}$. Ea est linea AE seu EF, per quadragesimamseptimam Primi. Quum itaque EF sit $\sqrt{80}$, & EB sit 4: erit BF, $\sqrt{80}$ in 4. Ac tanta erit BH. Sed AH erit 8 in $\sqrt{80}$ in 4: hoc est, 12 in $\sqrt{80}$. Iam 12 in $\sqrt{80}$, ducta in 8, tantundem efficiunt quantum $\sqrt{80}$ in 4 in se ducta, sicut vult hæc vndecima. Hæc verò in secundo nostræ Algebræ volumine abundè explicauimus: quam nos propediem, Deo iuuante, latinam faciemus.

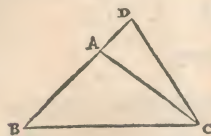
Atque has omnes Secundi Libri Propositiones Campanus Numeris accommodat, sub Decimamsextam Noni, hanc ramen vndecimam omninò à Numeris excludit. Neque interim de Irrationalibus verbum vllum facit.

THEO

THEOREMA II, PROPOSITIO XII.

In Amblygoniis Triangulis, quod à latere obtusum angulum subtendente fit Quadratum, tanto maius est duorum reliquorum Quadratis quantum est id quod continetur bis sub vno horum, & eo quod ipsi adiungitur in quod perpendicularis cadit, augmento.

Sit Triangulum ABC , cuius angulus A obtusus. Et protracto latere BA interminatè, ducatur, per duodecimam Primi, à puncto C ad protractam, perpendicularis CD : ut sit AD augmentum lateris BA . Dico Quadratum lateris BC , tanto maius esse Quadratis duorum BA & AC laterum, quantum est id quod bis continetur sub BA & AD , Rectangulum: scilicet, Quadratum BC æquale esse Quadratis BA & AC cum eo quod bis fit ex BA in AD .



Est enim, per quartam huius, Quadratum BD æquale Quadratis duorum BA & AD & ei quod bis sub ipsis BA & AD continetur, Rectangulo. Et quia Quadratum BC , per quadragesimamseptimam Primi, est æquale duobus BD & CD : erit idem BC Quadratum æquale tribus Quadratis BA , AD , & DC & ei quod bis sub BA & AD continetur Rectangulo. At, per eandem, Quadratum AC , æquale est Quadratis AD & DC . Est igitur Quadratum BC æquale Quadratis BA & AC & ei quod bis sub BA & AD comprehenditur, Rectangulo, Quod fuit demonstrandum.

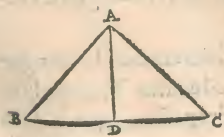
THEOREMA 12, PROPOSITIO XIII.

In Triangulis, quod ex latere alterum acutorum angulorum subtendente fit Quadratum, tanto minus est duorum reliquorum laterum Quadratis, quantum est id quod bis continetur sub illo in quod perpendicularis introrsum cadit & ea ipsius parte quæ perpendiculari anguloq; acuto interiacet.

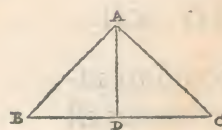
Quod Euclides de Triangulis Oxygoniis proposuit, nos cum Campano ad omnia Triangula ampliauius. Triangula enim omnia duos, minimum, habent acutos angulos.

Si itaque fuerit Oxygonium, à quolibet angulorum demittatur perpendicularis, Si verò Orthogonium aut Amblygonium, demittenda erit ab angulo recto aut ab obtuso: in id latus scilicet quod duobus acutis angulis interiacet: quæ omnino intra Triangulum cadet, ut demonstrauius ad vigesimam Primi. Ac tum huius Theorematis Demonstratio tres Triangulorum species generatim complectetur.

Sit igitur Triangulum ABC , cuius duo anguli B & C acuti, quantuscunque sit angulus A . Ab angulo A , demitto perpendicularem AD in latus BC . Dico Quadratum lateris AB , tanto minus esse Quadratis duorum laterum AC & BC , quantum est duplum eius quod fit ex toto BC in partem DC . Vel etiam Quadratum AC , tanto minus esse Quadratis duorum AB & BC , quantum est duplum eius quod fit ex CB in BD .



Quadratum enim AC , per quadragesimamseptimam Primi, æquale est duobus Quadratis AD & DC : Et Quadratum BC , per septimam huius, cum Quadrato DC ,
f æquale



æquale est Quadrato BD cum eo quod bis fit ex BC in DC .
Tria igitur Quadrata AC , BC , & DC , æqualia sunt
tribus Quadratis AD , DC , & BD cum eo quod bis fit ex BC
in DC . Commune auferatur Quadratum DC : Erunt duo
Quadrata AC & BC , æqualia duobus Quadratis AD & BD
cum eo quod bis fit ex BC in DC . At Quadratum AB æquale est duobus Qua-
dratis AD & BD . Quare idipsum AB Quadratum, tanto minus erit duobus AC
& BC , quantum est duplum eius quod fit ex BC in DC , Quod erat probandum.

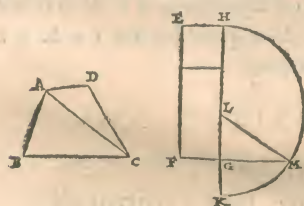
Hæc Demonstratio, quam ab illa communi aliquantum variavimus, directa est.
Æstimatio enim utraque ponitur: ut à maiori auferatur minus.

Simili argumentandi ratione, probabitur Quadratum lateris AC , tanto minus
esse Quadratis duorum AB & BC , quantum est duplum eius quod fit ex CB in
 DB , Rectanguli.

PROBLEMA 2, PROPOSITIO XIII.

Dato Rectilineo æquale Quadratum describere.

Sit datum Rectilineum $ABCD$, cui æquale Quadratum describendum sit. Con-
stituo Parallelogrammum Rectangulum $EFGH$, æquale ipsi $ABCD$ Rectilineo,
per quadragesimam quintam Primi. Cuius si latera fuerint æqualia, id ipsum erit
quale volumus. Sin minus, continuabo vnum laterum ipsius, ut HG , ad punctum
 K : & ponam CK æqualem lateri FG . Diuidam postmodum totam HK bifariam, in



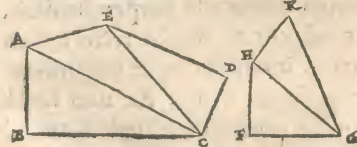
puncto L . Atque in ipso L posito Centro, descri-
bam super lineam HK , Semicirculum HMK : Et
protraham FG latus, donec secet Semicirculum
in puncto M . Dico Quadratum lineæ GM esse
æquale Rectilineo $ABCD$.

Connectam LM . Et quia linea HK diuisa est
æqualiter in L , & inæqualiter in G : erit, per quin-
tam huius, quod fit ex HG in CK cum Quadra-

to GL , æquale Quadrato LK : ob id, Quadrato LM : quapropter & duobus
Quadratis LG & GM , per quadragesimam septimam Primi. Dempto ergo utrinq-
ue Quadrato LG : erit quod fit ex HG in CK (id verò est Parallelogrammum EFG)
æquale Quadrato GM . Quare & Quadratum GM æquale Rectilineo $ABCD$,
Quod faciendum fuit.

Hoc, etiam loco addere placuit ex Campano, Compendium inueniendi late-
ris Terragonici: ad eas Figuras, quas vocant Irregulares, æquandas.

Sit Figura quæpiam anormis, $ABCD$, quatuor laterum: Quæ in terna Triangu-
la resoluetur ABC , AEC , & ECD .

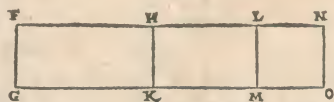


Hæc tria, secundum doctrinam huius, redu-
co ad tria Quadrata: quorum latera sint, verbi
gratia, FG , FH , & HK . Tum statuo FG & FH
ad angulum rectum F : & connecto GH : super
quam erigo HK , itidem ad angulum rectum

CHK : Et connecto CK . Et erit CK latus Tetragonis quæsit: ut satis manifestum
est ex Propositione illa quadragesima septima Primi.

In Figuris autem Regularibus, quæ in Triangula æqualia resoluntur, compendium
multò promptius est. Expedit enim ad vnum Parallelogrammum Rectangulum re-
ducuntur, & inde ad Quadratum.

ALITER. Conuertantur singulatim Triangula in Parallelogramma Rectangu-
la, quæ vnum Parallelogrammum efficiant. Verbi gratia, reducatür Triangulum
 ABC ad Parallelogrammum $EFGH$ Rectangulum, per quadragesimam secundam
Primi.



Primi. Tum super linea HK constituitur Parallelogrammum itidem Rectangulum HKLM, æquale Triangulo ACE, per quadagesimam-quartam eiusdem. Demum, per eandem, super linea LM constituitur Parallelogrammum LMNO, æquale Triangulo CDE.

Eritq; FGNO vnum Parallelogrammum, per quadagesimamquintam Primi: atque æquale toti Figuræ Rectilineæ ABCE. Quod, per hanc vltimam, conuerteret in Quadratum.

Libri Secundi Geometricorum Elementorum

FINIS.





IACOBI PELETARII

CENOMANI IN EVCLIDIS

ELEMENTA GEOMETRICA

DEMONSTRATIONVM

LIBER TERTIVS.



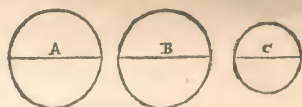
DEFINITIONES.



Equales Circuli, sunt quorum Diametri sunt æquales: vel quorum quæ ex Centro lineæ, sunt æquales.

Quum Circuli peripheria infinitatem præ se ferat, Circuli dimensio à Peripheria non petitur, sed à linea recta, nempe à Diametro.

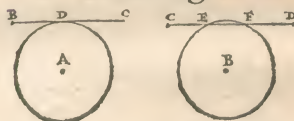
Hæc verò Definitio ex se clara est. Nam quum Diametri per Circulorum Centra educantur, & dimidium orbium semper subtendant: si sint ipsæ æquales, ab ipsdem quoque dimidia æqualia subtendi par est. Quorum verò dimidia sunt æqualia, ea inter se sunt æqualia.



Vt, Æquales quidem sunt A & B Circuli, ob equalitatem Diametrorum: maiores autem C Circulo: quum minor sit huius Dimetiens. Sed & æquè significans est & manifesta altera pars Definitionis, vel

ex ea, quam in Principiis Libri Primi posuimus, Circuli Definitione.

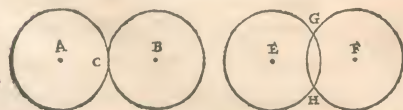
2 Contingere Circulum recta linea dicitur, quæ Circulo incumbens in vtranq; partem



eiecta, Circulum non secat.

Circulum A, linea B C contingit in D puncto. Sed Circulum B, linea C D secat in E & F punctis.

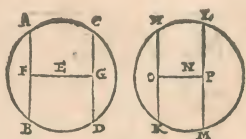
3 Circuli sese contingere dicuntur, quorum Peripheriæ sese tangentes, inter se non secant.



Duo Circuli A & B sese contingunt in C. Duo verò E & F, secant alter alterum in G & H punctis.

4 Aequaliter distare à Centro, lineæ dicuntur, quum à Centro ad ipsas ductæ perpendiculares sunt æquales. Remotior autem à Centro linea, in quam maior perpendicularis cadit.

Vt in



Vt in Circulo $ABCD$, duæ lineæ AB & CD æqualiter distant ab E Centro: propterea quod duæ EF & EG perpendiculares, sunt æquales. At in Circulo $HKLM$, remotior est HK à Centro N quàm sit LM . Est enim NO ipsa NP maior.

5 Sectio Circuli, est Figura comprehensa sub recta linea & peripheriæ portione.

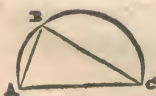


Figura ABC , quam constituunt AC recta & ABC portio peripheriæ: Item DBE , quam constituunt DE recta & DBE portio eiusdem, Sectiones sunt Circuli. Rectæ verò AC & DE , Chordæ vulgò dicuntur: sicut curvæ ABC & DBE , Arcus. Sed FG figura, proprio nomine Semicirculus vocatur: & FG , Diameter.

6 Angulus sectionis, est qui sub recta linea & Circuli peripheria comprehenditur.

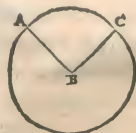
In posterioribus Figuris, Anguli D, A, E , & C , Sectionis dicuntur.

7 In sectione angulus consistit, quem efficiunt duæ lineæ, à subtenfæ basis finibus ad punctum aliquod peripheriæ sectionis concurrentes.



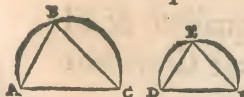
Angulus ABC , qui fit à duabus AB & BC rectis, quæ exeuntes à duobus terminis A & C subtenfæ AC , ad punctum B coeunt: in sectione consistit. Quod si angulum B absque basi AC : hoc est, sine Trianguli consideratione accipias: is in peripheria esse dicetur.

8 Sector Circuli, est Figura comprehensa sub lineis rectis quæ à duobus peripheriæ punctis educæ: ad Centrum conueniunt.



Duæ lineæ AB & CB , à duobus punctis A & C peripheriæ, ad Centrum B concurrentes, Circuli Sectorem ACB constituunt.

9 Similes Sectiones Circuli, dicuntur quæ angulos æquos suscipiunt: vel in quibus anguli sunt æquales.



Vt, si angulus rectilineus B , Sectionis ABC , æqualis sit angulo E , Sectionis DEF : duæ Circuli Sectiones ABC & DEF dicuntur Similes.

ÆQUALES verò Sectiones non definit: quia earum infinitæ sunt descriptiones. Possunt enim sub inæqualibus rectis lineis æquales Sectiones constitui, sed in Circulis inæqualibus: quum ex omni Circulo possit intelligi pars abscindi, parti alterius Circuli æqualis. Sed quæ æquales sunt & rectis lineis æqualibus continentur,



æquales omnino habent peripherias. Diuisisq; rectis lineis bifariam, perpendiculares ad peripheriam erectæ, æquales sunt. Vt duæ Sectiones ABC & DEF , sub lineis AC & DF æqualibus constitutæ, si sint æquales, duæq; AC & DF diuidantur bifariam in punctis G & H : erunt quoque duæ perpendiculares BG & EH æquales. Quod nos præmittendum duximus, demonstrandæ vigesimæ secundæ & vigesimæ tertie huius gratia: quum significantior Definitio dari non possit Sectionum Æqualium. Nam si in Circulis æqualibus, quælibet puncta vtriusque æqualiter distant à linea subtenfæ, nulla est inæqualitas portionum.

PROBLEMA PRIMVM,
PROPOSITIO PRIMA.

g



Ati Circuli Centrum inuenire.

Sit datus Circulus ABC , cuius Centrum sit inueniendum.

In ipso Circulo ducō lineam fortuitam AC : quam diuido æqualiter, per Decimam Primi, in puncto D : A quo excito perpendicularē DB , per vndecimam eiusdem: quæ vtrinque protracta, peripheriam attingat in punctis B & E . Hanc etiam BE diuido æqualiter in puncto F . Dico punctum F esse Centrum Circuli.

Nam si in F non est Centrum, non erit in puncto alio lineæ EB , vt in G : Essent enim à Centro ad peripheriam duæ GB & GE inæquales. Erit ergo extra EB lineam: sitq; si possit, in H puncto. Et connectantur HA , HC , & HD : vt fiat Triangulum HAC , diuisum in duo Triangula HAD & HCD . Et quia duo latera HA & HD , Trianguli HAD , sunt æqualia duobus lateribus HC & HD , Trianguli HCD , & basis AD basi DC æqualis: erit, per octauam Primi, angulus AHD æqualis angulo CDH : quapropter vterq; rectus, per decimam Definitionem Primi. At angulus ADB positus est rectus: Erit igitur angulus ADB ipsi AHD æqualis, pars toti, contra animi sensum. Non est igitur Centrum in H puncto. Sed nec vsquam alibi inuenietur quàm in F puncto, Quod erat ostendendum.



VIDES ex Recto & Æquo, punctum omnium maximè momentaneum peruestigari. In quo rationi conueniens erat, vt lineæ EB in vtranque partem æqualiter (vt indicat perpendicularum) inclinata, Circulum diuideret per medium: atq; ob id, Centrum in se contineret. Sed quoniam id representabatur tantum, non constabat: ad absurdum perducitur qui aduersatur. Vt in Circulo Affirmatio Negatioq; conueniant: sicut in Vniuerso Actio & Priuatio, Generatio & Corruptio. Ac breuiter contrariis omnia constant & perficiuntur. Centri igitur inuestigatio, veritatis conquisitionem graphicè exponit: quæ quum vna sit, atq; in medio posita: tamen inuentu longè difficillima, per controuersias elucescit: ac non nisi bono & æquo obsequitur.

Confectarium.

Si in Circulo recta lineam rectam lineam æqualiter & ad angulos rectos diuidat: in diuidente est Centrum Circuli.

Hoc verò satis patet ex Demonstratione iam posita. Si igitur duæ lineæ in Circulo æqualiter secant altera alteram: Centrum in puncto sectionis situm erit. Quod tamen posterius probabitur.

THEOREMA I, PROPOSITIO II.

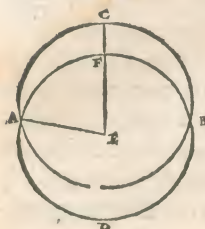
Si ad duo puncta peripheriæ recta lineam applicata fuerit: ipsa intra Circulum transit.

Sint duo puncta A & B , in peripheria Circuli AB , cuius Centrum C . Dico non posse educi lineam rectam ab A ad B , quin secet Circulum. Alioqui, transeat extra Circulum, vt lineæ ADB : quæ sit recta, si fieri possit. Et connectantur CA & CB : vt sit recta

Et quia $A C$ dividit ipsam $B D$ æqualiter: ipsa per Centrum transibit, ex Confectario primæ huius, Quod est contra positionem. Quare $A B$ & $C D$ non se per æqualia secant, Quod erat demonstrandum.

THEOREMA 4, PROPOSITIO V.

Circulorum se mutuò secantium non est idem Centrum.

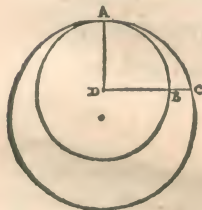


Sint duo Circuli $A B C$ & $A D B$, secantes se in punctis A & B . Dico eorum non esse vnum Centrum.

Nam si vnum possit esse, sit ipsum E punctum: Et ducatur linea $E A$: ac mox linea $E C$: quæ secet $A C B$ peripheriam in puncto C : & $A D B$ alteram peripheriam in F . Eruntq; per Centri Definitionem, $E A$ & $E F$ æquales: sed & $E A$ & $E C$ æquales. Quare quum ambæ $E F$ & $E C$ sint æquales ipsi $E A$, erunt & ipsæ inter se æquales, Quod esse non potest. Non igitur E , sed nec vllum aliud punctum, erit vtriusque Centrum, Quod erat probandum.

THEOREMA 5, PROPOSITIO VI.

Circulorum se contingentium non est idem Centrum.



Sint duo Circuli $A B A$ & $A C A$, se contingentes in puncto A . Dico eorum non esse idem Centrum.

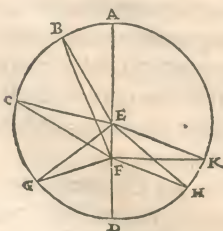
Si enim idem possit esse, sit ipsum D : Et ducantur $D A$ & $D B C$ lineæ. Eritq; per definitionem Centri & Circuli, vtraque linearum $D B$ & $D C$ æquales ipsi $D A$. Quapropter $D B$ æqualis $D C$, Quod esse non potest.

Circulorum verò sese extrinsecus tangentium satis constat diuersa esse Centra: quum Centrum sit in medio sui Circuli.

THEOREMA 6, PROPOSITIO VII.

Si in Diametro Circuli punctum signetur aliud à Centro, & ab ipso ad peripheriam plures educantur lineæ: maxima erit in qua Centrum, minima verò quæ Diametrum perficit. Sed quæ Centro propiores sunt, cæteris longiores. Duæ autem duntaxat rectæ lineæ æquales ab ipso puncto ad peripheriam exhibunt.

Sit Circulus $A B C D$, cuius Centrum E , Diameter verò $A E D$: in qua signetur punctum F inter E & D . Et ab ipso F educantur lineæ $F B$, $F C$, & $F G$. Dico $F A$ esse maximam linearum, minimam verò $F D$: Aliarum autem, $F B$ ipsa $F C$ maiorem: & $F C$ ipsa $F G$. Dico etiam duas tantum lineas rectas æquales educi posse vtrinque ab F puncto ad peripheriam.



Connectantur enim $E B$, $E C$, & $E G$. Et quoniā duo latera $F E$ & $E B$, Trianguli $B E F$, sunt, per vigesimā Primi, maiora tertio $F B$: erit & $F A$ maior $F B$: quum $F A$ sit æqualis duabus $F E$ & $E B$. Rursus quum duo latera $E B$ & $E F$, Trianguli $B E F$, sint æqualia duobus $E F$ & $E C$, Trianguli $C E F$: angulus autem $B E F$ maior angulo $C E F$: erit & basis $F B$, per vigesimam quartam Primi, maior basi $F C$: Atque eadem ratione $F C$ maior quàm $F G$. Quoniam rursus duæ $E F$ & $F G$, per vigesimam Primi,

maiores

maiores sunt quàm EG : erunt & maiores quàm ED : quum EG & ED sint æquales. Communi itaque ablata EF , supererit FG maior FD . Maxima igitur est FA , minima verò FD . Maior autem FB quàm FC : & FC quàm FG , Quod est prius.

Constituatur porrò angulus FEH , per vigesimamtertiam Primi: æqualis angulo $FE G$: & connectatur FH . Quumq; EF & EG sint æquales duabus EF & EH : erit, per quartam Primi, basis FG basi FH æqualis.

Ac iam probabitur ab ipso F puncto, aliam lineam quàm FH , ad peripheriam educi non posse, æqualē ipsi FG . Nam si possit, ducatur FK . Quumq; FH sit æqualis FG , erit & ipsa FH ipsi FK æqualis, repugnante prima parte huius Propositionis: quum sit FK propior Centro. Duæ igitur duntaxat FG & FH sunt æquales.

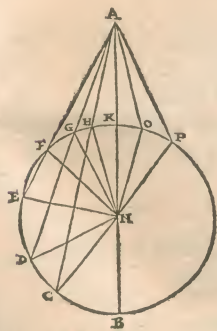
VEL sic. Connectatur EK . Et quoniam æqualis est EG ipsi EK , communis autem EF : & basis FG basi EK æqualis: erit, per octavam Primi, angulus $FE G$ æqualis angulo FEK . At angulus FEH positus est æqualis angulo $FE G$. Erit igitur angulus FEK æqualis angulo FEH , minor maiori, quod est absurdum.

Hinc manifestum est, duas lineas ab aliquo puncto Diametri hinc inde exeuntes, si æquales angulos cum Diametro fecerint, æquales esse. Quales hoc loco sunt duæ FG & FH lineæ.

THEOREMA 7, PROPOSITIO VIII.

Si à puncto extra Circulum signato lineæ exeuntes, Circulum secant: maxima est quæ per Centrum transit: Aliarum autem quæque, quanto huic propior, tanto maior. Partium verò ipsarum quæ extrinsecus in peripheriam cadunt, minima est quæ in continuum est Diametri: aliarum autem quæque, quanto huic propior, tanto minor. Et duæ duntaxat rectæ lineæ æquales ab ipso puncto in peripheriam cadunt.

A puncto A signato extra Circulum $BCDB$, cuius Centrum N , ducantur plures lineæ secantes Circulum: sintq; $AKNB$, AHC , AGD , & AFE . Dico AB per Centrum eductam, omnium esse longissimam: & AC maiorem AD , & AD maiorem AE . Earum verò quæ extrinsecus sunt partium, minimam esse AK , & AH minorem AG , & AG minorem AF . Dico præterea duas tantum rectas lineas æquales à puncto A in peripheriam cadere posse.

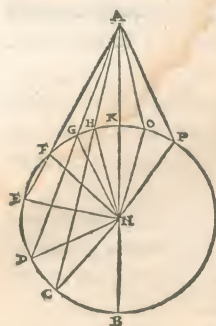


Connectantur NC , ND , NE , NF , NG , & NH . Eademq; erit argumentandi ratio quæ in antecedente. Nam in Triangulo ACN , duo latera AN & NC (quibus est æqualis AB) sunt maiora AC , per vigesimam Primi: Quapropter & AB maior AC . Rursus quum angulus ANC , maior sit angulo AND : erit AC maior AD , per vigesimamquartam eiusdem: ob idq; AD maior AE . Et quoniam NK est æqualis NH : sed NH & HA maiores NA : ablati æqualibus NH & NK , supererit AH maior AK . Et quoniam angulus ANG , maior est angulo ANH : erit basis AG maior basi AH : ob idq; AF maior AG . Maxima igitur est AB earum quæ per Circulum educuntur. Maior autem AC quàm

ipsa D : & AD maior quàm AE . Minima porrò exteriorum est AK : & minor AH quàm AG , & AG minor quàm AF , Quod est prius.

Iam verò constituatur, per vigesimamtertiam Primi, angulus ANO æqualis angulo ANH . Eritq; duorum Triangulorum ANH & ANO , basis AH æqualis basi AO , per quartam

quartam Primi. Neque erit alia ipsi AH æqualis. Nam si ponatur AP : erit & ipsa AP , per communem Notionem, æqualis AO , Quod iam probauimus fieri non posse: quum sit AO ipsi AK propior.



VEL sic. Quoniam angulus ANP , maior est angulo ANH (est enim ANO ipsi ANH æqualis): erit quoque basis AP , maior basi AH , per vigesimamquartam Primi. Non igitur æqualis. Quare duæ tantum lineæ rectæ æquales vtrique à puncto A in peripheriam cadunt, Quod erat demonstrandum.

NEMO autem offendatur, quòd hinc lineas quæ extrinsecus aduenientes Circulum penetrant, secare Circulum dixerimus. Nam tametsi propriè sola KB Circulum secet: tamen AB sic secare Circulum dicitur, vt quæuis linea lineam alteram. Atque vt linea NB peripheriam secat vnico sui puncto, nempe puncto B : ita AB Circulum secat, ea sui parte quæ est KB . Faceſſat igitur calumnia. Nos enim Geometriam exquisitè quidem, sed non nimis anxie tractamus. Sed quæ abundant, quantum possumus, refecamus: atque ad breuitatem veritati amicam contrahimus.

THEOREMA 8, PROPOSITIO IX.

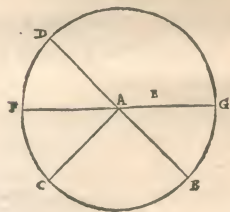
Si à puncto intra Circulum signato, plures quàm duæ æquales rectæ lineæ ad peripheriam ductæ fuerint: punctum illud erit Circuli Centrum.

Sit punctum A , signatum in Circulo BCD : sintq; tres rectæ lineæ AB , AC , & AD , ad peripheriam educæ, æquales. Dico punctum A esse Centrum Circuli.



Connectam enim BC & CD : Quarum vtranque diuidam æqualiter: illam quidem in puncto E , hanc verò in puncto F . Et ducam AE & AF : quas vtrique producam ad peripheriam Circuli.

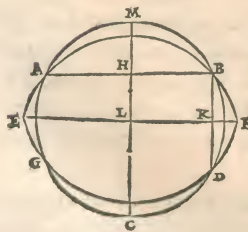
Eritq; Triangulorum ABE & ACE , vterque angulus qui ad E , æqualis: ob id, vterque rectus. Eadem ratione vterque angulorum qui ad F , rectus. Et quia AE diuidit BC per medium: & AF itidem DC per medium: vtraque ipsarum transit per Centrum, ex Conſectario primæ huius. Quare quum vtraque occurrat alteri in puncto A : erit ipsum A Centrum Circuli, Quod erat probandum.



ALITER ab impossibili. Sit E , si possit, Centrum Circuli: ex quo per punctum A , vtrique extendatur linea ad puncta F & G peripheriæ: vt sit FG Dimetiens Circuli. Eritq;, per septimā huius, AG maxima: & maior AB quàm AC , quū sit propior Centro E , Quod est cōtra hypothēsin.

THEOREMA 9, PROPOSITIO X.

Circulus Circulum in pluribus quàm duobus punctis non secat.

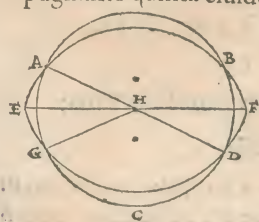


Secet, si fieri possit, Circulus ABC , Circulum DBF in pluribus quàm duobus punctis, vt in A , B , D , & G . Et coniunctæ AB & BD , secantur æqualiter in H & K . A quibus H & K punctis, excitentur perpendiculares HC & KE : quæ extendantur vtrique ad E , F , C , & M , puncta peripheriæ

DEF:

DEF: secantq; inter se in L puncto.

Et erit, per Confectarium Primæ huius, punctum L Centrum vtriusque Circuli, repugnante quinta eiusdem.

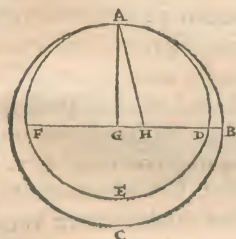


ALITER. Secent se, vt prius, duo Circuli in punctis A, B, D, G. Et, per primam huius, ponatur H Centrum Circuli ABC. Et connectantur tres HA, HD, & HG: quæ ex definitione Centri & Circuli, erunt æquales. Et quia exeunt ad peripheriam vtriusque Circuli, nempe ad sectionem ipsorum: erit & H per antecedentem, Centrum Circuli DEF, contra quintam Propositionem eiusdem.

THEOREMA 10, PROPOSITIO XI.

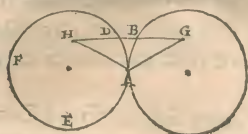
Si Circulus Circulum, siue introrsum, siue extrinsecus tangat: per Centra vtriusque ducta linea, in contactum ipsorum cadit.

Duo enim Circuli ABC & DEF sese tangant introrsum in puncto A. Dico lineam eductam per eorum Centra, cadere in A punctum.



Sin minus, cadat aliorsum: sitq; G Centrum Circuli ABC, ex prima huius: & H Centrum Circuli DEF. Tum per G & H ducatur linea GB, secans peripheriam interioris Circuli in puncto D: exterioris verò in B. Et ducantur GA & HA. Et quia, per vigesimam Primi, GH & HA maiores sunt GA: erunt & maiores GB. Communi igitur ablata GH, erit HA maior HB. Sed HD æqualis est ipsi HA: vtraque enim è Centro. Maior igitur est HD quàm HB, pars toto.

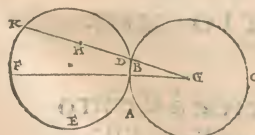
ALITER, Producatu'r DH ad punctum F peripheriæ DEF. Et quia G est extra Centrum H in Diametro Circuli DEF: maior erit GD quàm GA, per septimam huius. At GB est æqualis GA. Maior igitur GD quàm GB, pars toto.



Iam verò si duo Circuli se extrinsecus tetigerint: ducatur, vt prius, linea GH per Centra iam posita G & H, secans ambas peripherias in duobus punctis B & D: Et connectantur GA & HA.

Eruntq; , per vigesimam Primi, duæ GA & HA maiores GH. Quapropter & duæ GB & HD maiores GH, Quod est falsum.

ALITER. Sint duo Circuli ABC & DEF sese extrinsecus tangentes in puncto A: sitq; Circuli ABC, Centrum G, vt prius: A quo per contactum Circulorum producatu'r GA linea, ad punctum F peripheriæ DEF. Quæ quia negatur transire per Centrum ipsius DEF Circuli: ducatur ab eodem Centro G, altera linea GK: quæ transeat,



si fieri possit, per Centrum H ipsius DEF: secans peripheriam ABC in puncto B, & DEF in puncto D: partemq; ipsius oppositam in puncto K. Et quia à puncto G extra Circulum DEF signato, ducitur linea GK, transiens per Centrum H: & altera non per Centrum transiens, GF: minor erit pars illius exterior GD, parte huius exteriori GA: per octauam huius. Sed GA est æqualis GB. Minor igitur erit GD ipsa GB, totum parte, Quod est absurdum.

HANC posteriorem partem probauimus ex octaua huius, sicut priorem ex septima: & sanè commodius. Prior enim figuratio & si ex arte sit, tamen non facile accipitur: Neutrum enim Centrorum in suo loco consistit.

Cæterum

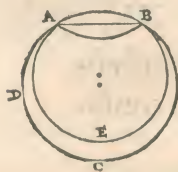
Cæterum ex his duabus Theonis, vnam fecimus : quòd tam sint hæc duo capita coniuncta, quàm duo sequentia.

THEOREMA II, PROPOSITIO XII.

Theoni 13.

Circulus Circulum non tangit in pluribus punctis vno:
& si introrsum, & si extrinsecus tangat.

Nam, si fieri possit, tangat Circulus $ABCD$, Circulum ABE prius introrsum in duobus punctis A & B : post extrinsecus, tangat Circulus AEB , Circulum ACB in duobus A & B punctis.



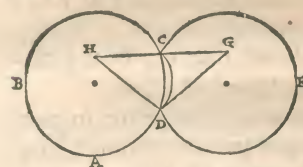
Quum itaque in priori constructione duxerimus lineam rectam ab A ad B , si ipsa ceciderit extra Circulum ABE interiorem: id erit contra doctrinam secundæ huius. Si verò cadat intra ambos: quum diuiserimus ipsam æqualiter, vt in F , & eduxerimus perpendicularem transeuntem per F ad vtranque peripheriam: ipsa transibit per vtriusque Centrum, ex Confectario primæ huius: repugnante sexta eiusdem: immò & antecedente: quum non cadat in contactum ipsorum.



VEL sic. Sit exterioris Circuli Centrum F : interioris verò Centrum G . Et linea applicata ex F in G , si protrahatur, exhibit per priorem partem antecedentis, vtrinque ad duos contactus A & B . Eritq; FA æqualis ipsi FB : è Centro enim ad peripheriam: Quapropter maior erit FA quàm GB . Eadem ratione erit GB æqualis GA . Quare FA maior GA , quod fieri non potest.



SED nec extrinsecus sese contingunt. Linea enim ducta à puncto C ad punctum D , cadet quidem intra vnum Circulorum, sed extra alterum, Quod est contra secundam huius.



ALITER. Si sese contingant in duobus punctis, vt in C & D : ducatur linea recta à Centro vnus ad Centrum alterius. Atque hæc, per antecedentem, transibit per punctum C & per punctum D . Quod fieri non potest, ne duæ lineæ rectæ includant superficiem.

Potest etiam duci linea recta à Centro ad Centrum: Quæ transibit, verbi gratia, per C , alterum contactuum: ex antecedente. Ac tum connexis GD & HD , fiet Triangulū, cuius duo latera GD & HD non erunt maiora latere GCH , contra vigesimam Primi.

THEOREMA 12, PROPOSITIO XIII.

Theoni 14.

In Circulo, si rectæ lineæ æquales fuerint: eæ à Centro æqualiter distabunt. Et si à Centro æqualiter distiterint: ipsæ erunt æquales.

In Circulo esse rectæ lineæ dicuntur, quæ ad Peripheriam vtrinque terminantur. Sint in Circulo $ABCD$, cuius Centrum E , duæ lineæ AB & CD æquales. Dico ipsas à Centro æqualiter distare: Et contrà, si à Centro æqualiter distent, ipsas esse æquales.

Ducam à Centro lineas EF & EG , perpendiculares ad AB & CD . Eritq; per secundam

cundam partem tertiæ huius, AB æqualiter diuisa in F : & CD æqualiter in e puncto.



Connectam postmodum EA , EB , EC , & ED . Et quoniam duo latera AB & AE , Trianguli AEB , sunt æqualia duobus lateribus CD & CE , Trianguli CED , & basis EB , basi ED : erit, per octauam Primi, angulus B æqualis angulo C : Quum itaque duo latera AE & AF , Trianguli AEF , sint æqualia duobus lateribus CE & CG , Trianguli CEG : erit, per quartam Primi, basis EF , basi EG æqualis : Quæ quum sint perpendiculares, erunt AB & CD æqualiter distantes à Centro, per quartam Definitionem

huius.

ALITER. Quadratum ipsius AE est æquale Quadratis duarum AF & EF , per quadagesimamseptimam Primi : Et Quadratum EC , per eandem, æquale Quadratis CG & EG . Atqui Quadratum AE est æquale Quadrato EC . Erunt igitur Quadrata duarum AF & EF æqualia Quadratis duarum EC & EG . Dempstis itaque æqualibus AF & CG , supererunt duo Quadrata EF & EG æqualia. Quapropter ipsæ EF & EG lineæ, sunt æquales : ob idq; , AB & CD , per Definitionem, æqualiter distant à Centro, Quod est prius.

Iam consequitur, si AB & CD æqualiter distant à Centro, ipsas esse æquales. Nam quum Quadrata duarum EF & FG sint æqualia : ipsis ablatis, supererunt Quadrata duarum AF & CG æqualia : ob id, & ipsæ æquales. Erunt igitur AB & CD æquales, quum earum dimidia sint æqualia, Quod fuit demonstrandum.

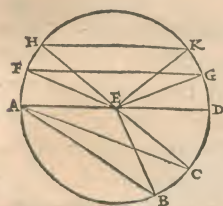
THEOREMA 13, PROPOSITIO XIII.

Theoni 15.

In Circulo, maxima linearum est Diameter: Aliarum verò vnaquæque quanto propior Centro, tanto maior.

In Circulo $ABCD$, cuius Centrum E , sint plures lineæ AB , AC , AD , FG , & HK : quarum AD sit Diameter Circuli. Hanc dico esse omnium longissimam : Alias verò singulas quanto propiores Centro, tanto singulis esse maiores.

Cum Centro connectantur extremitates omnium, ductis EB , EC , EG , EK , EH , & EF . Eruntq; , per vigesimam Primi, duo latera EF & EG , Trianguli EEG , maiora



tertio FG : Quæ quum sint æqualia ipsi AD : erit AD maior FG . Eademq; ratione, maior quàm vnaquæque reliquarum, si ipsæ ponantur bases Triangulorum : quum bina quæque latera è Centro exeuntia, sint ipsi AD æqualia, Quod est prius. Porro quum duo latera EF & EG , Trianguli EEG , sint æqualia duobus EH & EK , Trianguli EEK : & angulus FEG maior angulo HEK : erit, per vigesimam-quartam Primi, basis FG maior basi HK . Haud dissimili ratione erit AC maior quàm AB . Sicq; patet tota Propositio.

THEOREMA 14, PROPOSITIO XV.

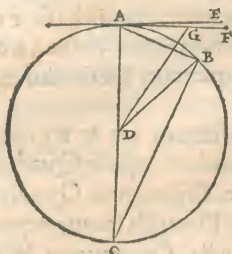
Theoni 16.

Quæ ab extrema Circuli Diametro perpendicularis ducitur linea, extra Circulum cadit : Neque inter ipsam & peripheriam altera recta linea capi potest. Et Semicirculi angulus omni angulo acuto rectilineo maior est, reliquus autem minor.

g Sit

Sit Circulus ABC , cuius Centrum D , Diameter verò AC : per cuius extremitatem A , ducatur linea perpendicularis, vt AE . Dico ipsam cadere extra Circulum.

Sin minus, cadat perpendicularis intra: & sit illa AB : Et connectatur DB . Eritq; per quintā Primi, angulus DAB æqualis angulo DBA : ob idq; rectus. At in Triangulo, duo anguli recti esse non possunt, per decimamseptimam Primi. Non igitur AB , neque alia intra Circulum, perpendicularis erit super extrema Diametro.



VEL sic. Connectatur CB . Et quia angulus CAB est rectus: ipse erit maior angulo ABC , per decimamseptimam Primi. Atque ob id, erit latus CB maius latere AC , per decimamnonam eiusdem, contra antecedentem. Cadet ergo perpendicularis extra Circulum, qualis est AE , Quod est primum.

Dico insuper, inter AE & peripheriam, non capi alteram lineam rectam. Quæ si possit, ipsa sit AF : ad quam ducatur perpendicularis DG : vt sit DGA angulus rectus. Eritq; per decimamnonam Primi, latus DA maius latere DG , Quod est falsum. Quare inter AE & peripheriam nulla linea recta intercipitur, Quod est secundum.

Postremo, Dico angulum CAB , qui fit à Diametro CA & Semicirculo ABC , maiorem esse omni angulo acuto rectilineo: & EAB eodem minorem. Est enim CAE rectus: ob id, omni acuto maior: constatq; duobus EAB & CAB mixtis angulis. At verò inter EA & BA , nulla recta linea capi potest, vt modò probauimus. Quapropter quum EAB diuidi nequeat per lineam rectam, erit minima pars quæ à recto possit auferri, & CAB maxima. Omnis enim angulus Rectilineus per æqualia diuiditur, ex nona Primi. Ac sic constat tota Propositio.

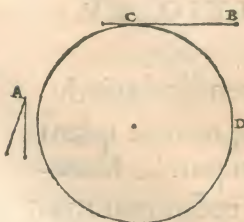
Consectarium.

Recta linea ab extremitate Diametri perpendicularis, Circulum tangit: idq; in vno puncto.

Nam si in duobus punctis tangat, ipsa intra Circulum cadet, per secundam huius, Quod modò improbauimus.

QVVM verò huius Theorematis caput postremum attentius cōsiderarem, mihi sanè in mentem subiit prima specie, Geometriam non satis sibi constare: immò adeò, repugnantiam in se admittente.

Primum enim extra intelligentiam est, vt inter Quantitates minima dari possit: qualem hoc loco angulum, quem dicunt, Contingentiæ, seu rectius, Contactus, minorem omni acuto posuimus. Nihilo magis conuenit, vt maxima Quantitas detur: qualis hic angulus Semicirculi omni acuto rectilineo maior ponitur. Quantitas enim eo nomine Quantitas est, quòd partibus constet: & secundum eam æquale & inæquale dicatur. Quantitatis etiam Continuæ in infinitum sectio est. Atque adeò quum in primam Propositionem Decimi incidissem, tum magis anxie expendere cœpi quonam pacto conciliari posset tam aperta, vt apparebat, repugnantia. Sic enim habet prima Decimi.



Si à maiori duarum Quantitatū auferatur maius quàm dimidium, ac rursus ex reliquo maius quàm dimidium, idq; continuò fiat: relinquetur tandem magnitudo, minor magnitudine minore posita.

Verbi causa, Sint duo anguli, A quidem rectilineus, & BCD angulus (si modò sit angulus) contactus: Vult Prima Decimi: vt, si auferatur ab angulo A , maius quàm dimidium, ac rursus à reliqua parte

parte maius quàm dimidium : sicq; continuò ex residuis partibus maius quàm dimidium : tandem relinquatur minor angulus quàm BCD . Cuius demonstrationem hic non appono, quum ex sequentibus pendeat. Nulla tamen in tota Geometria Propositionis est, quæ (vt sic dicam) magis naturaliter vera sit. Quod ex Numeris (in quibus rerum omnium imagines) luce clarius euadit. Quis enim non videt, propositis duobus Numeris 8 & 2, quum ab octonario maius quàm dimidium abstuleris, vt quinarium : tum à ternario residuo, maius quàm dimidium, vt binarium : relinqui vnitatem, posito binario minorem?

Neque verò ad rem facit quod Campanus illuc excipit, Propositionis sententiam de quantitativis eiusdem generis esse intelligendam. Hæc quippe conciliatio nulla est : quinetiam menti Euclidis contraria, vt nos quum illuc ventum erit, manifestum faciemus. Immo & ipse Campanus secum pugnat, quum in secunda Duodecimi demonstranda, aliisq; Propositionibus nonnullis Solidorū, ipse à Curuo Rectum aufert.

Nos igitur hanc dubitationem sic expediemus : vt dicamus lineam rectam quæ Circulum tangit, cum peripheria angulum non efficere : scilicet BCD nullo modo angulum dici debere. Omnis enim angulus in sectione consistit, non in contactu. Et vbi cessat sectio, cessat quoque anguli forma. Atque, vt vno verbo dicam, In Decussatione (Decussationē hoc loco & Sectionem sine discrimine accipio) omnes angulorum species perficiuntur.

Duabus enim lineis AB & CD se scindentibus in puncto E ad angulos rectos, intelligatur CD sic moueri in orbem, scilicet super puncto E fixo : vt ex CD fiat FG : hinc sanè ex recto angulo AEC , fiet obtusus AEF : inde ex recto BEC , fiet acutus BEF . Quumq; facta fuerit HK : hinc quidem angulus obtusior fiet HEA , inde verò acutior KEA : sicq; continuò, donec peruenierit ad AB , & intra eosdem terminos concludatur cum ea. Tum enim immersa, vt sic dicam, linea CD in lineam AB , euanescet angulus.

Neque diuersa ratio est in Curuo. Sit enim in Circulo $ABCA$, cuius Centrum D , linea DE præteriens peripheriam, & secans ipsam in A puncto fixo. Super quod circūducatur ipsa DE per puncta F, G, H . Tum fient anguli continuò varii cum peripheria in ipso puncto A : donec cessante decussatione, linea ED facta sit EK , & tangat Circulum. Ac tum linea DE non iam inclinata intelligitur, sed immersa in lineam BAC , quantum ad angulum attinet : non aliter quàm si BAC esset linea recta. Neq; contrà facit, quòd diducantur lineæ, faciāntq; spatium CAK . Nam id sola AC linea efficit, quæ rectam refugit : sed eam tamen in puncto A amplectitur. Quum igitur omnis angulus in pluribus punctis non consistat quàm vno : fit vt punctum A tam sit ineptū angulo constituendo, quàm modò erat punctum sectionis E , linearum rectarū. Fortasse dices punctum A lineæ recte manere in suo recto : punctumq; A peripheriæ, in suo rotundo : neque vtrunque esse idem punctum : sed lineas se tantum inter se veluti lambere, quia altera alteram penitus omniq; puncto refugit : vt contraria contrapposita fiant manifestiora. Id verò sensus nō recipit. duo enim Circuli sese exterius tangentes, rectam lineam intermediam illibatam relinquerēt : scilicet, si intelligeremus Circulum qui in puncto A tangeret ipsum ABC Circulum exterius : quod non patitur linearum natura. Sed demus id fieri posse : vt nihil in cogitationem cadat, quod semel vsquam Geometria non repræsentet. Illud tamen minimè vrgebit. Immo tantò minus contactus linearum erit angulus. Hiabit enim vtrique ipsarum concursus. Sed nos hæc Geometricis rationibus confirmemus, per Theoremata.

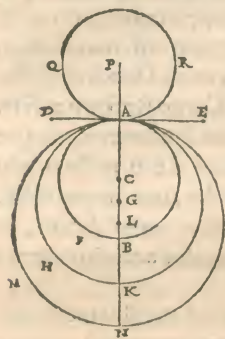
Contactus duorum Circulorum interior, Quantitas non est.

g 2

Sit

Sit enim Circulus $AFBA$, cuius Centrum c , Diameter verò AB : per cuius extremitatem A , ducatur linea DE ad angulos rectos. Et constat, ex Confectario huius Decimæquintæ, lineam DE contingere ipsum $AFBA$ Circulum: ac propterea DAF esse minorem omni angulo acuto, ex ipsa Euclidis sententia: scilicet per ultimam partem huiusce Decimæquintæ. Iam verò inter puncta c & B , suscipiatur in Diametro AB , Centrum G : & spatio GA , describatur alter maior Circulus $AHKA$. Dico FAH non esse quantitatem.

Constat quippè Circulum $AHKA$ transire inter rectam DA & curvam AF : quum sit Semidiameter GA , maior Semidiametro CA . Manifestum quoque est, lineam DE



tangere ipsum $AHKA$ Circulum, ex eodem huiusce Decimæquintæ Confectario: ac propterea DAH esse omni acuto minorem. Describatur tertio, secundum maius spatium LA , Circulus $AMNA$. Et erit, ex eodem Confectario, DA AM omni acuto minor. Sicq; in infinitum, erunt omnes contactus quos efficiet linea DE cum Circulis ductis per A punctum, quorum Centra in AB linea, minores omni acuto Rectilineo: ac sic omnes æquales (si modò æqualitas inter non quanta dici possit). Quapropter contactus DA AM , erit æqualis contactui DA F : fietq; vt MA F , contactus interior Circulorum, neque augeat neque minuat contactum DA AM . Igitur MA F quantitas non est, Quod erat demonstrandum.

SED & probabimus contactum interiorem Circulorum, quantitatem non esse, in hunc modum.

Nempè quum omnes Circuli sint Similes, erunt & Semicirculi Similes: Quapropter anguli qui sunt à Diametro & peripheria, in omnibus Circulis sunt æquales: per Conuersam Definitionis Similium Sectionum: (nam ab hac æqualitate angulorum non excludentur anguli mixti). Erit igitur angulus BAF , æqualis vtrique angulorum KAH & NAM : Ac propterea contactus FAM nihil addit ad angulum BAF . Quare FAM quantitas non est, Quod fuit demonstrandum. Hinc sequitur alteru;

Contactus linea recta cum Circulo, Quantitas non est.

Manente enim eadem constructione, si DAF sit quantitas: ipsa vtique diuidetur per lineam rectam, aut per obliquam. Non per lineam rectam, repugnante ultima parte huius Decimæquintæ: neque per obliquam, vt per lineam AM : esset enim FAM pars ipsius DAF . Atqui FAM quantitas non est, vt modò probauimus. Non est igitur FAM pars ipsius DAF . Igitur DAF neque per lineam rectam neque per obliquam diuidi potest. Quare DAF quantitas non est, Quod erat probandum. Hinc exurgit tertium.

Contactus duorum Circulorum exterior, Quantitas non est.

In eadem constructione, protrahatur BA Diameter ad punctum P . Tum Centro P , intervallo autem PA , describatur Circulus $AQRA$, tangens Circulum $AFBA$ exteriori in puncto A . Dico contactum BAQ non esse quantitatem.

Id verò manifestum est ex posteriori Demonstratione. Nam neq; per lineam obliquam diuiditur: quum FAM non sit quantitas, per primam harum: neque per rectam, quum neque DAF sit quantitas, per secundam earundem: neque BAQ quantitas, per eandem. Quare quum FAM partes nullas habeat, quantitas non erit, Quod erat probandum.

Ex his emerget hoc Pronuntiatum, quod in Geometria nemo haftenus admitendum esse cogitauit,

Anguli qui sunt à Diametro & Peripheria, siue intra siue extra Circulum, recti sunt, & rectis rectilineis æquales.

Vt in

Vt in posteriore Figura, angulus BAF æqualis est angulo BAD : quum ipsi nihil accrescat ob contactum DAF , qui quantitas non est: & ob id, QAP rectus est, & æqualis ipsi DAP , quum DAQ nihil addat, Quod erat probandum.

Atque vt rationes quoque philosophicas (immò quæ Philosophiæ pars in Geometria non latet?) Geometricis speculationibus immisceamus: Circulus ipse omnia in se recipit, ob sui perfectionē. Quumq; sit omni ex parte absolutissimus, indignum fanè est vt ipsum Recti minimè capacem esse putemus. Vt verissimè Plato lineam quæ Circulum constituit, rectam esse dixerit, non secus quàm eam quæ à puncto in punctum breuissimè extenditur: etsi illam, distinctionis gratia, obliquam vocemus.

HIS AD hunc modum demonstratis, facessent à Geometria Paralògismi, qualis imprimis ille est peruulgatus, quem hùc affert Campanus. Datur, inquit, angulus maior angulo BAF , & minor eodem: neque tamen datur eidem æqualis. Id verò ex superioribus refellitur: Nihil enim maius neque minus eo quod quantum non est, dici debet. In Numeris quidem id accidit. Datur enim maior Numerus quàm 78 vt 3 : & datur minor eodem, vt 2 : neque tamen æqualis eidem, Sed quantitatis Continuae, quàm Discretæ, longè alia est natura. Continuorum enim in infinitum sectio est: Discretorum non item: Quod & ratio vocabulorum indicat. Nam in Continuis nihil vacat, nihilq; intermittitur. In Discretis verò omnia nominatim deducta sunt. Vt, verbi gratia, bis quatuor seu octo, Arithmetice quidem in Quadratum euadere non possunt: Geometricè verò maximè. Nos autem ex hac Demonstratione quàm latum ad Geometriæ abdita peruestiganda patefecerimus campum, aliquando, Deo iuuante, notum faciemus in proprio libello de Quadrato & Circulo: & dubitationes quæ huc contrà adduci possunt, diluemus.

Dissoluetur & ille Paralògismus à Cardano propositus libro subtiliū decimosexto. Aliqua quantitas, inquit, potest continuè, atque adeò infinitè augeri, altera verò infinitè minui: Et tamen augmentum illius, quantuncunque euadat, minus semper erit decremento huius.

Verbi causa, Sumatur angulus rectilineus ABC : & describantur duo Circuli $DEFD$ & $DGH D$, sese intrinsecus tangentes in puncto D : quorum Centra erunt in vna Diametro DF . Tum angulus EDG Circularis, poterit infinitè augeri: ducendo scilicet Circulos cōtinuè minores per punctum contactus D , quorum Centra sint in DF Diametro. At angulus ABC rectilineus poterit infinitè minui, per diuisiones quales docet nona Primi: vt hîc in ABN , post in ABM (atque hæc binaria diuisio satis sit). Et tamè angulus Circularis, augendo nunquàm euadet æqualis angulo rectilineo decrescenti: vt hîc angulus EDK , minor omninò est angulo ABM : Et si plures ducerentur Circuli, etiam infiniti: nunquàm fieret angulus contactus tam magnus quàm angulus ABM , immò quàm eius pars millesima. Quod patet, inquit, ducta linea OP contingente. Angulus enim ODK minor est omni angulo acuto rectilineo: quare EDK multo minor erit.

Haftenus ex illius sententia.

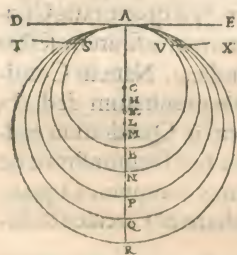
Cui sic respondemus, ABC quidem angulum infinitè minui posse: sed EDG augeri posse, id verò inficiamur. Demonstrauimus enim EDK non esse maius EDG . Atque hæc minimè coherent, ODG æquale esse ipsi ODK , sicut & ipse ibidem astruit: & EDK maius esse EDG . Nam si ODG æquale est ODK : nihil utiq; addit EDK ad ODG : ob id, neque ad EDG . Quare EDK , immò EDK maius esse non potest quàm EDG . Sicq; euertitur fallacia.

Proponit ibidem Cardanus ex Apollonio & Rabi Mose, de duabus lineis in eodem plano existentibus, quæ protractæ ad angulum tendere videntur, propioresq; inter se semper fiunt: Et tamen magno, vt ipse putat, miraculo, nunquàm concurrunt:

runt: etiam si in infinitum protrahantur. Quod etiam obiter adnotauerat Georgius Valla ex Gemino, Libro primo suæ Geometriæ, Cap. lxx. Et post hunc Cælius Calcagninus, ad Iacobum Zieglerum scribens, ex cuiusdam obseruatione cuius nomen reticet. Hunc autem paralogismum suo loco dissoluemus.

Sed quid inuentum nostrum differemus? quum iam nunc in præsentia quod pollicemur magna ex parte præstare possimus? Nos enim, ut maximè conticendum aliquid duceremus, alia certè habemus solidiora & vtiliora: (nisi quòd captiosas Propositiones refellere, non paruam habet vtilitatem) quæ in id tempus seruabimus, dum integrum Euclidem offeramus.

Sit itaq; Circulus ABA , cuius Centrum c , & Diameter AB : Sitq; linea recta DE , Circulum tangens in A puncto. Tum inter duo puncta c & B , Diametri, suscipiantur plura Centra (ac nunc quatuor suscepisse satis sit) H, K, L, M : super quibus describantur quatuor Circuli, ANA, APA, AQA , & ARA , transcentes inter DE rectam & ABA peripheriam, seq; inter se tangentes interius in A puncto.



Et manifestum est, horum quatuor Circulorum peripherias paulatim & ut nouè loquar, punctuatim propiores fieri ipsi rectæ DE . Sumatur igitur punctum s in peripheria AN , proximè A punctum. Post in peripheria AP ponatur aliud punctum, quod propius accedat ad ipsam DE quàm punctum s : quod quoniam sua nota commodè signari non potest, vocetur punctum secundum. Sit deinde in peripheria AQ , aliud punctum, quod propius sit ipsimet DE , quàm punctum secundum: dicaturq; punctum tertium. Demùm

in peripheria AR , sit punctum propius accedens ad eandem DE quàm tertium: atq; hoc nominetur punctum quartum. Sicq; continuè, si intelligantur Circuli duci per contactum A , prioribus maiores, quorum Centra in AB linea: eorumq; puncta singillatim propiora lineæ DE . Tandem per hæc puncta, nempe primum, secundum, tertium, & quartum, & si qua essent plura, ducatur linea ST . Quam manifestum est paulatim semper accedere ad DE , non secus quàm Circulorum puncta per quæ ipsa educitur: & tamen nunquàm coniungi posse cum ipsa DE : etiam si lineæ infinitè protrahantur, scilicet si infiniti ducantur Circuli. Quotquot enim ducentur, in vnico puncto A tangent lineam DE : ex hac Decimaquinta. Constat igitur lineam ST , ut cunque accedat ad lineam DE , cum ea tamen nunquam conuenire posse. Atque hoc idem intelligi volo in alteram partem de linea VX .

At dices, Video quidem Circulos omnes vnico sui puncto tangi à recta linea DE : ac propterea lineam ST infinitè protractam per puncta Circulorū, concurrere cum DE non posse. Sed tamen mirari non desino quānam ratione id fiat. Sanè ratio Geometrica admirationem tollit: facitq;, ut magis mirum non sit de linea quàm de Circulis ipsis. Totum igitur ad Circulum refertur, modis omnibus mirabilem. Tam enim mirum videri debet propius intuenti, peripherias Circulorum, ut hîc AB, AN, AQ , & AR , semper remoueri, longiusq; discedere à puncto A : & tamen suo ipsarum ductu in ipsum A redire: quàm lineam ST ad rectam AD semper accedere, eam tamen nunquàm attingere. Ob id mixta linea dici debet ex recto & Circulari: ac propterea inter vtrunque perpetuò consistit. Desinet igitur mirari, qui Circuli formam, rationem, naturam, & constructionem perpenderit. Atque eiusmodi Lineæ constant infinitis lineis in se quodammodo recuruis seu refractis. Sed quum Circuli per A ducti, omninò contigui propter infinitatem intelligantur: hoc loco ST vix aliter sensui quàm pro vnica linea obijcitur. Neque dubium est quin ipsa ex earum sit genere quas ex Apollonio proponunt (ac tale est in Solidis latus Hyperboles, ut illuc docuimus): at certè nullo modo recta, quod putabat Calcagninus: sed linea quædam anormis, cuius non sit mirum neutram esse naturam. Verum nos hæc ad Corporum materiam reponimus, ut ad Circulos reuertamur.

PRO

PROBLEMA 2, PROPOSITIO XVI.

Theoni 17.

A puncto extra Circulum signato, lineam ad Circuli contactum ducere.

Sit punctum A extra Circulum B C D, cuius Centrum E, volo à puncto A, ad Circulum B C D, lineam contingentem ducere.

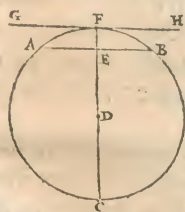
Ab ipso E Centro ad punctum A, duco rectam E A, secantem Circulum in puncto D. Tum super eodem Centro E, secundum intervallum E A, describo Circulum A F G. Et à puncto sectionis D, excito D F perpendicularem, quæ secet Circulum exteriorum in F. Et connecto E F, secantem Circulum interiorum in B. Ac postremo connecto A B. Dico A B esse quæ contingit Circulum B C D.

Sumptis enim duobus Triangulis A E B & F E D, erunt duo latera A E & E B illius, æqualia duobus F E & E D huius: & angulus E utrique communis. Basis igitur A B, per quartam Primi, basi F D æqualis: & angulus E B A, angulo E D F. Sed angulus E D F rectus: quapropter & E B A rectus. Quare, per Confectarium antecedentis, A B linea contingit B C D Circulum, Quod erat demonstrandum.

Sic quoque demonstrabimus, exercitationis gratia. Ducta linea A E, inuestigo quantum possit A E supra E D: per ea quæ demonstrauius ad quadragesimamseptimam Primi: & sit linea F G, potentia A E supra E D. Iam verò ex A E linea data, & ex duabus quæ sint ipsis E D & F G datis æquales, conficio Triangulum A B E per vigesimamsecundam Primi. Et E B omnino desinet in peripheriam, ex definitione Centri: Eritq; angulus A B E rectus per vltimam Primi. Quare A B continget Circulum: per Confectarium antecedentis, Quod erat probandum.

Linea recta quæ Circulum secet, lineam rectam quæ Circulum tangat parallelum ducere.

Sit linea A B, secans Circulum A B C, cuius Centrum D, in punctis A & B. Volo ipsi A B parallelum ducere, quæ tangat Circulum.



Diuido A B bipartitò in puncto E. Tum per E punctum & per Centrum D, duco Diametrum C D E F. Duco postmodum G F H lineam ad angulos rectos ipsi C F Diametro. Dico G F H, quæ, per Confectarium decimæquintæ, tangit Circulum, esse ipsi A B parallelum.

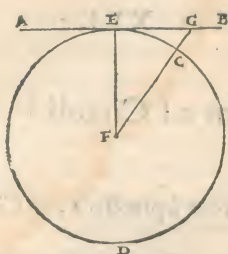
Nam quum recta C F in vtranq; cadens, faciat omnes angulos qui ad E rectos, per tertiam huius: sintq; duo anguli qui ad F positi recti: erunt A B & G H paralleli, per vigesimamnonam Primi, Quod erat demonstrandum. Hæc ad Figuras Circulis inscribendas percommoda,

THEOREMA 15, PROPOSITIO XVII.

Theoni 18.

Si recta linea Circulum tangat: à Centro ad contactum ducta recta linea, erit tangenti perpendicularis.

g 4 Sit



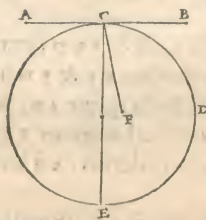
Sit linea AB , tangens Circulū CED , cuius Centrum F , in puncto E . Et à Centro F ducatur linea FE . Hanc dico esse perpendicularem ad AB .

Quæ si non fuerit: sit FG ad AB perpendicularis, secans peripheriam in C . Quumq; angulus EGF sit rectus: erit in Triangulo EFG , latus EF maius latere FG , per Decimanonam Primi: Quod est falsum, quum sit FC ipsi FE æqualis. Probatur hæc à negatione, in modum Conuersarum. Est enim Conuersa Consectarij Decimæ quintæ huius.

THEOREMA 16, PROPOSITIO XVIII.

Theoni 19.

Si Circulū recta linea tangat: à contactu perpendicularis deducta, per Centrum transit.



Sit linea AB tangens Circulū $CDEA$ in puncto C : A quo demittatur CE perpendicularis ipsi AB , ad punctum E peripheriæ. Dico CE transire per Centrum.

Sin aliter: sit Centrum extra ipsam CE , ut in F puncto: A quo ad punctum C , ducatur FC : quæ, per antecedentem, erit perpendicularis ad AB : ob id, angulus ACF æqualis angulo ACE , pars toti, Quod est absurdum.

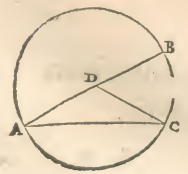
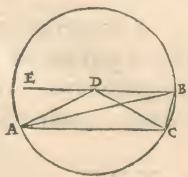
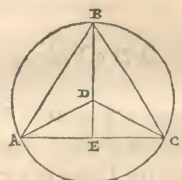
THEOREMA 17, PROPOSITIO XIX.

Theoni 20.

In Circulo, angulus qui ad Centrum duplus est eius qui ad peripheriam, quum vterque super eandem peripheriæ portionem constiterit.

In Circulo ABC , cuius Centrum D , sit angulus ADC ad Centrum, angulus verò ABC ad peripheriam: quorum vterque super eandem peripheriæ portionem AC consistat. Dico angulum ADC duplum esse anguli ABC .

Aut enim neutra duarum AB & CB , neutram secat duarum AD & DC : Aut altera illarum, alteram harum: Aut denique altera harum, in altera est illarum. Ac primò neutra duarum AB & CB , neutram secet duarum AD & DC . Tum per punctum D ducatur linea BE . Eritq; per trigessimam secundam Primi, angulus ADE æqualis duobus angulis ABD & BAD , interioribus oppositis. Qui quum sint æquales, per quintam eiusdem, erit ipse AED duplus anguli ABD . Eadem ratione erit angulus CDE duplus anguli CBD . Totus igitur ADC duplus est totius ABC , Quod fuit ostendendum.



Quòd si altera illarum, ut AB , secet alteram harum, ut CD : tum producta BE , fiet angulus EDC duplus anguli DBC , per trigessimam secundam Primi. Dempto igitur EDA , qui duplus est anguli DBA , à toto EDC : demptoq; DBA à toto DBC : erit reliquus ADC , reliquo ABC duplus, Quod erat probandum.

Si verò altera harum, ut AD , sit in altera illarum, ut ADB sit linea vna: tum angulus ADC manifestò erit duplus anguli B , per quintam & trigessimam secundam Primi, Quod erat demonstrandum.

Hoc loco annotauit Nicolaus Tartalea sequentem appendicem. Quam nos in Theorema redequimus: & aliquantò breuius demonstrauimus ex hac Decimanona.

Si

Si fuerint duo anguli, quorum vnus ad Centrum, alter ad peripheriam, & ambo vna recta linea subtendantur: erit spatium circa angulum qui ad Centrum, comprehensum, duplum anguli qui ad peripheriam.

Maneat angulus ADC , vt modò, ad Centrum: & constituatur ad peripheriam ABC , angulus eiusdem appellationis ABC . Et per Centrum D ducatur linea BDE secans peripheriam in puncto E . Dico duos angulos ADE & CDE simul sumptos, duplos esse ad angulum ABC .

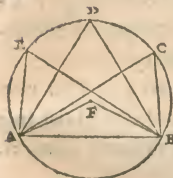


Id verò patet ex hac ipsa Decimanona. Nam ADE angulus ad Centrum, duplus est anguli ABD : quum sint super eandem peripheriam AE . Eadem ratione, CDE duplus est ipsius CBD . Quare duo anguli ADE & CDE simul sumpti, dupli sunt ad totum ABC angulum, Quod erat ostendendum.

THEOREMA 18, PROPOSITIO XX.

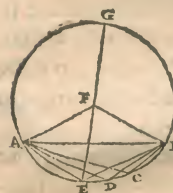
Theoni 21.

In Circulo, qui in eodem segmento sunt anguli, inter se sunt æquales.



In segmento ADB , Circuli $ABCD$, cuius Centrum F , sint anguli ACB , ADB & AEB . Dico omnes esse æquales.

Connectatur AB . Ac tum si duæ linearum aliquæ se in Centro secant: erit manifesta propositio ex antecedente. Erit enim angulus AFB , duplus ad vnumquemque illorum: quapropter, ex animi Notione, ipsi inter se æquales. Quòd si non se secuerint, tum ductis AB & BF , idem statim innotescet.



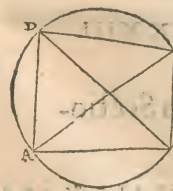
Si verò fuerint in minori segmento, vt in AEB : tum connexis AF & BF : atque item ductis lineis ab vnoquoque angulorum, per Centrum, ad peripheriam (hîc verò satis fuerit duxisse EFC): erit totum spatium circa angulum F , duplum ad vnumquemque illorum. Quare ipsi inter se æquales, Quod fuit demonstrandum.

THEOREMA 19, PROPOSITIO XXI.

Theoni 22.

Quadrilaterotum in Circulis inscriptorum, duo anguli inter se oppositi, duobus rectis sunt æquales.

Sit Quadrilaterum $ABCD$, in Circulo eiusdem designationis, $ABCD$ inscriptum. Dico binos quosque angulos oppositos, duobus rectis esse æquales.



Ducantur in Quadrilatero duæ lineæ dimerientes, AC & BD . Eruntq; , per antecedentem, duo anguli ABD & ACD , qui in eodem segmento ABD , æquales: Duo itidem CBD & CAD , qui in eodem segmento BDC , æquales. Totus itaque B angulus, duobus ACD & CAD æqualis. At duo ipsi ACD & CAD cum toto D , sunt duobus rectis æquales, per trigessimamsecundam Primi.

Sunt igitur duo B & D , anguli oppositi, duobus rectis æquales. Eadè argumetatione probabimus duos A & C oppositos, duobus rectis esse æquales.

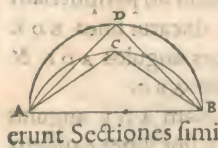
THEOREMA 20, PROPOSITIO XXII.

Theoni 23.

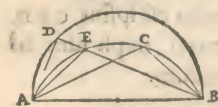
Super eadem recta linea, duæ Circulorum sectiones similes inæquales

inæquales ad eandem partem constitui non possunt.

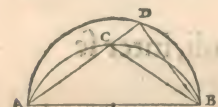
Sit recta linea AB , super qua constituta sit Sectio ACB : & ducantur rectæ AC & BC . Dico super eadem AB non posse constitui ex eadem parte similem Sectionem Circuli, inæqualem.



erunt Sectiones similes, ex Definitione ultima huius.



vigessimam huius, maior eodem ADB . Quare nec sic Sectiones similes.

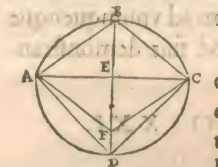


Si demum altera illarum, ut AC , sit pars alterius harum, ut ipsius AD : erit & per eandem decimam sextam Primi, angulus C maior angulo D . Non igitur sunt similes Sectiones.

Ex his verò satis constat, minorem Sectionem super AB constitui non posse ipsi ACB similem. Quare nullo modo similes inæquales Sectiones super eadem linea constitui possunt, Quod erat demonstrandum.

Hic subiicit Campanus, Super eadem recta linea, neque ad eandem partem neque ad oppositam, similes Sectiones inæquales constitui posse. Quod ipse probat ex superpositione, quam vocant, Figurarum. Id verò alia ratione demonstrabimus.

Sit Circuli portio ABC (seu Sectio, nihil facio discriminis) constituta super AC linea. Ex altera verò parte constituatur portio ADC super eadem AC , ipsi ABC similis. Dico ABC & ADC sic non posse esse inæquales. Sit enim, si possit, maior ADC : & diuidatur AC bifariam in puncto E : & ducatur recta BED , secans ad rectos angulos ipsam AC : Et connectantur AB , CB : AD , & CD .



Et quoniam maior est ADC portio quam ABC : maior quoque erit perpendicularis ED quam EB , ut præmonstrauimus ad calcem Definitionum huius Tertij. Rescetur ergo ED ad æqualitatem EB : & sit EF æqualis EB . Eritq; Triangulum AEB æquale Triangulo AEF , per quartam Primi: Et angulus EBA æqualis

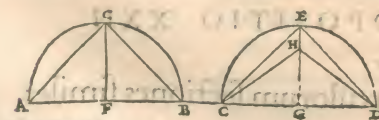
angulo EFA . Ac simili ratione, per eandem, erit angulus ECB æqualis angulo ECF . Totus igitur ABC toti AFC æqualis. Sed ipse AFC , per vigessimam primam Primi: maior est ipso ADC . Igitur & ABC maior quam ADC . Quare, à Definitione, ipsæ ABC & ADC portiones, non sunt similes, Quod est contra positionem. Non sunt igitur similes & inæquales, Quod erat probandum.

THEOREMA 21, PROPOSITIO XXIII.

Theoni 24.

Super æqualibus rectis lineis, similes Circulorum Sectiones constitutæ, inter se sunt æquales.

Sint duæ lineæ AB & CD æquales: ac super iisdem constitutæ duæ ABC & CDE Sectiones similes. Dico ipsas Sectiones esse æquales.



Sin minus, Altera illarum alteri superposita, excedet maior minorem. At linea AB est vna linea cum CD . Vnde accidet contra præceptum antecedentis.

SED

SEd quia hanc Figurarum superpositionem iandudum à Geometricis Demonstrationibus explodendam esse censuimus; quanuis hoc Theorema nulla ferè alia probatione egeret, quàm antecedens: tamen hac ratione Geometrica demonstrabimus.

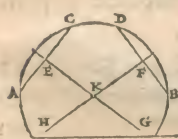
Quoniam duæ ACB & CED portiones, sunt similes, sed non æquales: sit maior CED . Et diuidantur duæ AB & CD lineæ bifariam: AB quidem in F , & CD in G puncto: Et erigantur duæ perpendiculares FC & GE . Et quia CED portio, maior est: erit quoque GE perpendicularis maior: vt ad finem antecedentis astruximus. Sectetur itaque GE in H , vt sit GH æqualis FC . Et quoniam duo latera AF & FC , Trianguli ACF , sunt æqualia duobus CG & GH , Trianguli CHG : & anguli F & G æquales: erit quoque basis AC , basi CH æqualis: & angulus ACF angulo CHG , per quartam Primi. Similiter erit angulus BCF , angulo DHG æqualis. Quapropter totus angulus ACB , toti angulo CHD æqualis. Sed CHD angulus, maior est CED angulo, per vigesimam primam Primi. Igitur & ACD angulus maior CED angulo. Quare Sectiones non sunt similes, Quod est contra positionem.

PROBLEMA 3, PROPOSITIO XXIII.

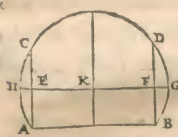
Theoni 25.

Circuli sectione data, Circulum perficere cuius est sectio.

Sit Sectio data AB , ex qua sit perficiendus Circulus.



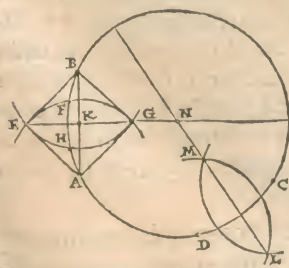
Ducam in ipsa duas lineas fortuitas AC & BD : quas diuidam bifariam: AC quidem in puncto E , & AD in puncto F . Tum à duobus punctis diuisionum, ducam intra Sectionem duas perpendiculares EG & FH : quæ se scindant in puncto K . Eritq; Centrum Circuli in vtraque ipsarum, per Confectarium primæ huius. Igitur K Centrum, Quod erit inuestigandum.



Si verò EG & FH non secant inter se, sed sint linea vna, vt GH , in secunda Figura: quod fit, quum duæ AC & BD sunt æquidistantes: tunc GH applicata ad vtranque partem peripheriæ datæ, capiet Centrum Circuli, per idem Confectarium. Neque enim æquidistantes esse poterunt EG & FH . Essent enim eiusdem peripheriæ duo Centra.

$HÆC$ est generalis Demonstratio perficiendi Circuli, quocunq; arcu dato: quam & adscribit Campanus. Ex qua deprompta est ratio illa compendiaria Centri inueniendi, Artificibus vulgò vsitata.

Sit enim peripheria $ABCD$, cuius Centrum sit reperiendum. Pono Centrum fortuitum in puncto aliquo datæ peripheriæ, vt in A : super quod describo peripheriâ liberæ extensionis, quæ sit EFG . Tum in puncto altero peripheriæ, vt in B , posito Centro, describo peripheriam eodem intervallo quo priorem, EHG : quæ secet EFG priorem, in duobus punctis E & G . Ducto postmodum ab ipsis Centris, rectas AE & BE : itemq; AG & BG . Suntq; hæ quatuor postremæ lineæ æquales: quum sint Semidiametri Circulorum æqualium. Tum ducio AB rectam: Fientq; duo Triangula Isoscelia AEB & AGB : quorum basis communis AB . Hanc igitur AB diuido bipartito in puncto K : Quod omnino cadet intra duas peripherias EFG & EHG : ne sit pars maior toto. Et connecto EK : quam produco ad G punctum. Vides iam duo Isoscelia diuisa esse in quatuor Triangula EAK , EBK : GAK , & GBK æqualia. Duo enim latera AE & AK , Trianguli AEK , sunt æqualia duobus BE & BK , Trianguli BEK : & basis EK vtriq;

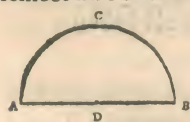


communis. Duo igitur anguli qui ad κ , duorum Triangulorum $A E K$ & $B E K$, per octauam Primi, sunt æquales: ob idq; , recti. Eadem ratione erunt duo reliqui anguli qui ad κ recti. Quapropter $E G$ linea vna, per decimamquartam Primi. Quæ quum diuidat $A B$ ad angulos rectos: ipsa exit ad Centrum, per Consectarium primæ huius. Atque eadem erit probatio duarum peripheriarum similiter ductarum ac se scindentium in punctis L & M : è quibus edueta linea $L M$, secabit lineam $E G$ in puncto N . Quod erit Centrum Circuli, per ipsum primæ huius Consectarium: intellecta $C D$ recta linea, ipsam $L M$ ad angulos rectos secante, Quod erat probandum.

Hanc demonstrationem apposui, vt videret vnusquisque quantum compendij fieri possit eorum quæ in arte fusè docentur. Id verò totum à Quadrati cum Circulo commercio proficiscitur. Triangula enim ad Quadrilaterorum probationem conferunt. Quadrilatera verò, sed præcipuè Quadrata, ad Circulos accommodantur.

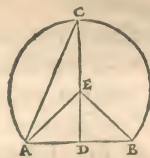
Vt hic, si intelligamus $A E B G$ Quadratum: cuius vna Diameter $A B$ peripheriam datam secat: altera $E G$, Centrum respicit. Sed hæc præter Demonstrationem.

Quæ verò sequuntur Demonstrationes, hanc Euclidis vigesimamquartam probant per capita: hoc est, ad nominatas Circulorum portiones singillatim pertinent: scilicet ad Semicirculum, portionesq; Semicirculo maiores aut minores.



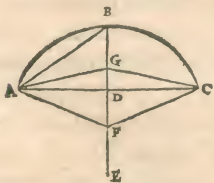
Primum itaque Semicirculo dato, cuius sit Centrum inueniendum: quia linea ipsum subtendens est Diameter: in ipsius puncto medio erit Centrum Circuli: quale hoc loco est punctum D in Diametro $A B$, Semicirculi $A C B$.

Sed sit data portio Semicirculo maior, vt $A C B$, cuius subtensa $A B$. Diuido $A B$ æqualiter in D puncto: à quo excito perpendicularem $D C$, quæ attingat peripheriam in C . Atque hæc transibit per Centrum, ex Consectario primæ huius. Tum connecto $A C$. Et quia angulus $C A D$ maior est angulo $A C D$, per decimamnonam Primi, quum $C D$ maior sit Semidiametro, & $A D$ multò minor: rescindo angulum $C A E$, æqualem angulo $D C A$, per vigesimamtertiam Primi, ducta linea $A E$, quæ secet $D C$ in puncto E . Dico E Centrum esse Circuli.



Connecto $E B$. Et constat, ex sexta Primi, $E C$ & $E A$ esse æquales: quum duo anguli $E A C$ & $E C A$ sint æquales: item, per quartam eiusdem, $E A$ & $E B$ esse æquales: quum duo latera $A D$ & $D E$, Trianguli $A E D$, sint æqualia duobus lateribus $D B$ & $D E$, Trianguli $D E B$. Tres igitur $E A$, $E B$, & $E C$ sunt æquales. Quare, per sextam huius, erit E Centrum Circuli.

Iam verò detur $A B C$ portio, minor Semicirculo. Huius subtensam $A C$ diuido æqualiter in puncto D . Et per ipsum D , duco ad angulos rectos lineam $B D E$: In qua quidem erit Centrum Circuli, per Consectarium sæpè citatum: sed non inter puncta $D B$: esset enim $A B C$ maior Semicirculo, contra positionem. Connecto igitur $B A$: & ab A puncto duco lineam, quæ cum $B A$ faciat angulum æqualem angulo $A B F$, per vigesimamtertiam Primi: sitq; illa $A F$: scilicet angulus $F A B$ sit æqualis angulo $F B A$: (Neque enim cadet vt $A G$, inter D & B . Ducta enim $G C$, essent, ex sexta



& quarta Primi, tres $G A$, $G B$, & $G C$, æquales: essetq; G Centrū Circuli, per sextam huius, quod modò improbatum est.) Connecto itaque $F C$. Atque eadem, qua paulò antè, argumentatione, erunt tres $F A$, $F B$, & $F C$ æquales. Quare F Centrum Circuli, Quod erat demonstrandum.

Atque ex inueniendi Centri Demonstrationes, commendationem quandam habent varietatis, sed vsum parum necessarium. Prima enim omnes abundè supplet.

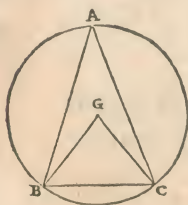
THEO

THEOREMA 22, PROPOSITIO XXV.

Theoni 26.

In Circulis æqualibus, qui ad Centrum quiq; ad Peripheriam sunt æquales anguli, ii super æquos Arcus consistunt.

Sint duo Circuli æquales: ABC , cuius Centrum G , & DEF , cuius Centrum H : sintq; ad Centra duo anguli AGC & EHF æquales: aut ad Peripheriam duo BAC & EDF æquales. Dico Arcum BC æqualem esse Arcui EF .



Connectantur BC & EF . Et quoniam Circuli sunt æquales: erunt GB & GC Semidiametri, æquales duabus HE & HF , per definitionem æqualium Circularum. Quapropter quum duo G & H anguli sint æquales: erit, per quartam Primi, basis BC , basi EF æqualis. Quumq; angulus A sit æqualis angulo D : erit Segmentum BAC simile Segmento

EDF , per definitionem Similium portionum. Et quia super æquales lineas cōsistunt: ipsa erunt æqualia, per vigesimamtertiam huius. Quare, ex communi Notione, duo reliqui Arcus BC & EF sunt æquales, Quod erat demonstrandum.

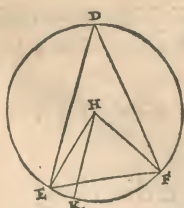
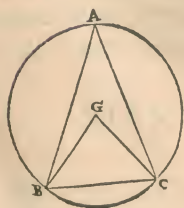
COMMODOVS tamen probabimus separatim, ut Campanus. Ponantur enim ut prius, duo anguli ad Centra, æquales. Ac tum connexis BC & EF , erunt, propter æqualitatem Semidiametrorum, ipsæ BC & EF æquales, per quartam Primi. Ducantur itaque BA & CA ad Peripheriam: itemq; ED & FD . Et erunt duo anguli A & D , per decimamnonam huius & animi Notionem, æquales. Igitur, per definitionem Similium Segmentorum, erunt duo Segmenta BAC & EDF similia: ob idq;, per vigesimamtertiam huius, æqualia: quum sint super æquales lineas. Quare duo reliqui Arcus BC & EF æquales, Quod est prius.

Iam verò ponantur A & D anguli ad Peripheriam, æquales. Et erunt, ex definitione, Segmenta æqualia. Ac tum ductis GB & GC : itemq; HE & HF : erunt ipsi G & H anguli, per decimamnonam huius & animi Notionem, æquales. Et quia Semidiametri sunt æquales: erunt, per quartam Primi, duæ BC & EF æquales. Erunt itaque, ut prius, Segmenta BAC & EDF æqualia, per vigesimamtertiam huius. Quare duo reliqui Arcus æquales, Quod erat demonstrandum.

THEOREMA 23, PROPOSITIO XXVI.

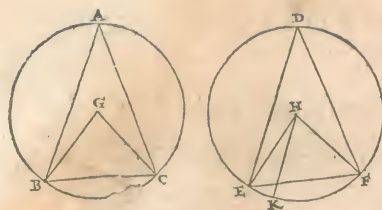
Theoni 27.

In Circulis æqualibus, qui super æquos Arcus consistunt anguli, siue ad Centra, siue ad Peripherias consistant, inter se sunt æquales.



Sint duo Circuli æquales, ABC , cuius Centrum G : & DEF , cuius Centrum H : sintq; duo anguli G & H ad Centra: vel duo A & D ad Peripheriam, ac super duos Arcus æquales BC & EF . Dico angulum G , esse æqualem angulo H : & angulum A , angulo D . Hæc est Conuersa antecedentis.

Si enim G non est æqualis H , sit H maior:
 h fiatq;



ED & FD : erunt A & D anguli æquales, ex decimanona huius & animi Notione, Quod erat demonstrandum.

fiatq; FHK æqualis ipsi G . Ac tum, ex antecedente, erit Arcus FK æqualis Arcui BC : Quapropter & Arcui EF , pars toti. Atque idem proveniet absurdum, si positis BC & EF Arcubus æqualibus, non fuerint A & D anguli ad Peripheriam, æquales.

VEL sic, Quum probati fuerint G & H anguli æquales, tum ductis BA & CA , itemq;

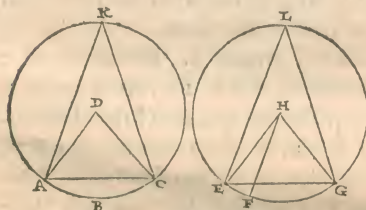
THEOREMA 24, PROPOSITIO XXVII.

Theoni 28.

In Circulis æqualibus, æquales rectæ lineæ æquos Arcus abscindunt: & maior linea, maiorem Arcum: minor verò minorem.

Sint duo Circuli æquales: ABC , cuius Centrum D : & EFG , cuius Centrū H : Sitq; AC recta linea, æqualis EG rectæ lineæ. Dico duos Arcus ABC & EFG esse æquales.

Quod si EG sit maior, maiorem etiam esse Arcum EFG .



Connectantur AD & CD ad Centrum: vel AK & CK ad Peripheriam: ac similiter EH , GH : & EL , & GL . Et quia Semidiametri utrinque sunt æquales, & bases itidem æquales: erunt, per octavam Primi, duo anguli D & H æquales: Ob idq;, per antecedentem,

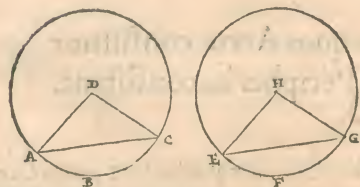
Arcus ABC æqualis Arcui EFG , Quod est prius.

At si EG linea ponatur maior: erit quoq; angulus H maior, per vigesimam quintam Primi. Facto itaq; angulo FHG æquali ipsi D : erit Arcus FG æqualis Arcui ABC , per vigesimam quintam huius. Maior igitur EFG ipso ABC , Quod erat probandum.

THEOREMA 25, PROPOSITIO XXVIII.

Theoni 29.

In Circulis æqualibus, sub æquis Arcubus æquales rectæ lineæ subtenduntur.



Sint duo Circuli æquales: ABC , cuius Centrum D : & EFG , cuius Centrum H : sitq; Arcus ABC æqualis Arcui EFG . Dico lineam AC esse æqualem lineæ EG . Conuersa antecedentis.

Connectantur DA & DC : itemq; HE & HG . Eruntq;, per vigesimam sextam huius, anguli D & H æquales. Quare, per quartam Primi, erit AC æqualis EG , Quod erat demonstrandum.

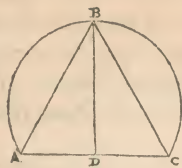
PROBLEMA 4, PROPOSITIO XXIX.

Theoni 30.

Datum Circuli Arcum bifariam diuidere.

Sit

Sit datus Arcus ABC , cuius subtensa AC . Hunc volo bifariam diuidere.



Secetur AC æqualiter in puncto D . A quo erigatur perpendicularis DB , secans datum Arcum in B . Hanc dico esse quæ diuidit Arcum ABC per æqualia in puncto B .

Connectantur BA & BC : quæ, per quartam Primi, erunt æquales: Quapropter, ex priori parte vigesimæseptimæ huius: erit Arcus AB æqualis Arcui BC , Quod fuit demonstrandum.

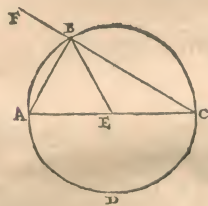
THEOREMA 26, PROPOSITIO XXX.

Theoni 31.

Qui in Semicirculo est angulus, rectus est: Qui verò in maiori Segmento, minor recto: Et qui in minori, maior. Sed angulus maioris Segmenti Mixtus, recto maior: minoris autem, minor.

Sit in Circulo $ABCD$, cuius Centrum E , Diameterq; AC , Semicirculus ABC : in quo sit angulus B rectilineus, eiusdem designationis ABC . Dico hunc esse rectum.

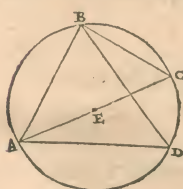
Connectatur B cum Centro, ducta linea EB . Eritq;, per quintam Primi, angulus A æqualis angulo EBA : & angulus $EB C$, angulo ECB : quapropter duo anguli qui ad B , æquales duobus angulis A & C . Atqui totus B angulus cum duobus A & C , sunt duobus rectis æquales, per trigessimamsecundam Primi. Quum igitur B sit eorum dimidium: ipse B est rectus.



VEL, vt alij, Quia angulus CEB æqualis est duobus A & EBA , per priorem partem trigessimæsecundæ Primi: ipse erit duplus ad angulum EBA : Itidem AEB duplus erit ad $EB C$. Duo igitur anguli qui ad E , dupli sunt ad totum B . Quare B est dimidia pars duorum rectorum, ac propterea rectus.

VEL rursus sic. Protrahatur CB ad F punctum. Et quia duo anguli qui ad B , Trianguli ABC , sunt æquales duobus A & C , per quintam Primi: & angulus ABF iisdem A & C æqualis, per trigessimamsecundam eiusdem: erunt duo ABF & ABC æquales. Quare vterque rectus, per decimamquintam Primi.

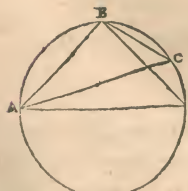
Mira Diametri Potentia: vt semper æqualis sit duabus quas coniungit potentijs.



Sit deinde in Circulo $ABCD$, cuius Centrum E , portio ABD maior Semicirculo: eiusq; subtensa, recta AD : super quam angulus rectilineus ABD . Hunc dico esse minorem recto.

Sumatur Diameter AC : & connectatur BC . Et quia angulus ABC , vt modò ostendimus, rectus est: erit, ex animi Notione, ABD angulus, minor recto.

Sed sit portio ABC , cuius subtensa AC , minor Semicirculo. Dico angulum ABC maiorem esse recto.

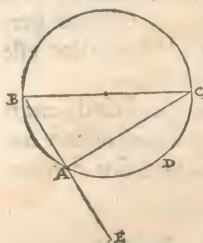


Ducatur Diameter AD : & connectatur BD . Et erit, ex primo capite huius, ABD (pars ipsius ABC) rectus. Quare ABC recto maior.

Demum in Circulo $ABCD$ sit portio ABC , cuius subtensa AC , maior Semicirculo: portio verò ADC , cuius subtensa eadem AC , minor eodem. Dico angulum Mixtum, scilicet qui ab Arcu CBA & recta AC comprehenditur, maiorem esse recto: sed angulum ab Arcu CDA eademq;

h 2 linea

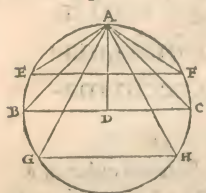
linea AC comprehensum, minorem esse recto.



Ducatur Diameter BC : & producaturs recta BA ad E punctum. Eritq; , per primam partem huiusce, angulus rectilineus BAC , rectus : Et, per decimamtertiam Primi, angulus CAE rectus. Quare, quum angulus rectus sit pars prioris, alter verò pars recti : erit ille recto maior, hic autem minor. Quod fuit probandum,

SED & hanc Propositionem omni ex parte spectandam exhibuimus, sub hac Descriptione.

Sit Circulus ABC , cuius Centrum D , Diameter verò BC .
Atque in eo ponatur EAF portio Semicirculo minor : & GAH portio, eodem maior : Et à punctis B, C, E, F, G, H , ducantur lineæ ad punctum A , vt in Schemate.



Eritq; de angulo BAC Demonstratio eadem quam suprà dedimus : Ex qua ceterorum angulorum probationes erunt manifestæ.

Quoniam enim duo anguli DAC & DCA sunt æquales, per quintam Primi : itemq; duo DAB & DBA æquales, per eandem : erit totus BAC æqualis duobus B & C : Atqui totus BAC , cum duobus B & C , sunt duobus rectis æquales, per trigessimamsecundam Primi. Totus igitur BAC rectus.

Hinc satis manifestum est, EAF angulum esse recto maiorem : sed GAH minorem eodem. Hincq; angulum Mixtum, qui fit ex linea recta AC & Arcu CHA , esse recto maiorem : Angulum autem qui fit ex eadem AC & Arcu CFA , esse recto minorem, Quod fuit probandum.

Huic tanquam Confectarium subijciemus.

Si in Circulo Triangulum Rectangulum inscriptum fuerit : latus recto angulo oppositum, Diameter erit Circuli.

Sit enim in Circulo $ABCD$, Triangulum ABC Rectangulum, cuius angulus B rectus. Dico latus AC esse Diametrum Circuli.



Sin aliter : erit Centrum extra AC , vt in puncto E . Et connectatur AE : quæ educatur ad punctum D Peripheriæ, oppositum : sitq; AED Diameter : & connectatur BD . Tum angulus ABD , per hanc trigessimam, erit rectus : sicq; æqualis angulo ABC , pars toti, Quod est absurdum. Sed nec alibi erit Centrum, quàm in AC . Est igitur AC Diameter, Quod erat probandum.

THEOREMA 27, PROPOSITIO XXXI.

Theoni 32.

Si Circulum tetigerit recta linea, à contactu autē exiens altera linea, Circulum secuerit; anguli quos cum tangente efficit, æquales sunt alternatim duobus qui in Circuli Segmentis sunt angulis.

Sit linea AB , tangens in puncto C Circulum $CDEF$, cuius Centrum G . Et à puncto C ducatur linea CF , secans Circulum : fiatq; super CDE portione, angulus D , ductis lineis CD & CF : Itemq; angulus F super portione CFE , ductis CF & EF . Dico angulum ECB esse æqualem angulo D : angulum verò ECA , æqualem angulo EF .

Ducatur Diameter CGH : & connectatur EH . Eritq; , per decimamseptimam huius,



ius, CH perpendicularis ipsi AB : Et, per primam partem antecedentis, angulus DEH rectus: ob idq; , angulo ACH æqualis. Posito itaque communi EH , erit angulus ACE , duobus CEH & ECH æqualis. At hi duo cum angulo H , per trigessimamsecundam Primi, duobus rectis sunt æquales: Et, per decimamtertiam eiusdẽ, angulus ACE cum angulo BCE , duobus rectis sunt æquales. Angulus igitur BCF , angulo H æqualis: ob id, & angulo D , per vigesimam huius: quum sint vna portione Circuli.

VEL breuius. Angulus CEH est rectus, per antecedentem: quapropter duo anguli H & ECH faciunt vnum rectum per trigessimamsecundam Primi. Quum igitur BCE & ECH faciant vnum rectum, dempto communi ECH , erit BCE ipsi H æqualis: Quare & ipsi D , per vigesimam huius, Quod est prius.

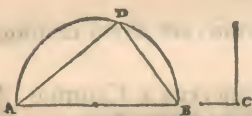
Quumq; D & F sint duobus rectis æquales, per vigesimamprimam huius: erit angulus F æqualis angulo ACE , Quod erat probandum.

VEL sic, angulus ACE cum angulo H sunt duobus rectis æquales, vt ostendimus: & BCE cum H idem duobus rectis æquales, per vigesimamprimam huius: quorum BCE est ipsi H æqualis. Angulus igitur E ipsi ACE est æqualis, Quod erat demonstrandum.

PROBLEMA 5, PROPOSITIO XXXII.

Theoni 33.

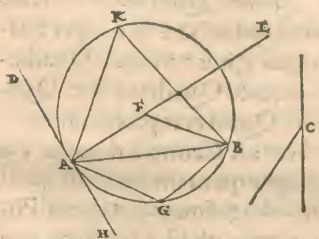
Super data linea Sectionem Circuli describere, quæ capiat angulum angulo dato æqualem.



Sit linea data AB : datus verò angulus c . Volo super linea AB describere Circuli Sectionem, quæ capiat angulum æqualem angulo c .

Ac primum, si fuerit angulus c rectus, descripto Semicirculo ADB super linea AB , ductisq; AD & BD : erit angulus D rectus, per primam partem trigesimæ huius.

Si verò fuerit obtusus, ducam lineam DA , facientem cum AB , angulum DAB , æqualem angulo c obtuso, per vigesimamtertiam Primi. Et à puncto A , ducam super AD , perpendicularem AE interminatam. Tum à puncto B , versus AE ducam lineam BF , secantem AE in puncto F : quæq; cum AB constituat angulum ABF , æqualem angulo EAB , quo obtusus rectum superat.



Eruntq; , per sextam Primi, AF & FB æquales. Posito itaque puncto F Centro, describo, secundum spatium FA & FB , Circulum $AGBA$. Et, per Confectarium decimæquintæ huius, linea DA tanget Circulum. Duco itaque AG & BG , constituentes angulum G : qui, per antecedentem, erit æqualis angulo DAB : quapropter angulo c obtuso.

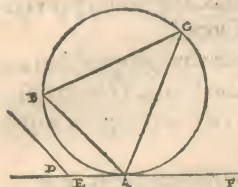
Iam verò si angulus c fuerit acutus: ducam AH lineam, quæ contineat cum AB angulum HAD æqualem angulo c acuto. Tum à puncto A , ducta perpendiculari AE , facio angulum ABF æqualem angulo BAE , quo rectus superat acutum: vt BF secet AE in F puncto. Ac tum, vt in superiori schemate, erunt FA & FB æquales, per sextam Primi: Eritq; F Centrum Circuli describendi. Inde ductis ad maiorem portionem lineis AK & BK : erit angulus K , per antecedentem, æqualis angulo BAC : Quare & angulo c dato, Quod erat faciendum.

h 3 PRO

PROBLEMA 6, PROPOSITIO XXXIII.

Theoni 34.

A dato Circulo segmentum abscindere, capiens angulum dato angulo rectilineo æqualem.



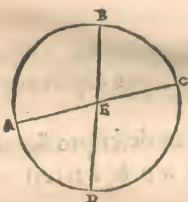
Sit Circulus datus ABC , datus verò angulus D . Volo à Circulo ABC abscindere segmentum, capiens angulum æqualem angulo D .

Duco lineam EF , quæ, per decimamseptimam huius, tangat Circulum in A puncto: A quo intra Circulum duco lineam AB , quæ cum AE faciat angulum EAB æqualem angulo D , per vigesimamtertiam Primi. Ac tum ductis lineis AC & BC , erit angulus C in segmento ACB , æqualis angulo EAB , per trigessimamprimam huius: Quare & angulo D dato, Quod fuit faciendum.

THEOREMA 29, PROPOSITIO XXXIII.

Theoni 35.

Si in Circulo duæ rectæ lineæ se inuicem secuerint: quod fit ex segmentis vnus, Rectangulum, æquum est ei quod ex alterius segmentis fit, Rectangulo.



Sint in Circulo $ABCD$, duæ lineæ AC & BD , secantes se in puncto E . Dico id quod fit ex AE in EC , æquum esse ei quod fit ex BE in ED .

Aut igitur vtraque transsit per Centrum, aut altera tantum, aut neutra.

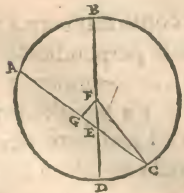
Si enim vtraque sit Diameter Circuli: erit E Centrum & quatuor segmenta æqualia: sicq; constabit propositio.



Si verò altera tantum transeat per Centrum, vt BFD : aut ipsa secabit AC æqualiter, aut inæqualiter. Quod si æqualiter: secabit & ad rectos angulos, per priorem partem tertiæ huius: Tum ducatur FC . Et erit, per quintam Secundi, quod fit ex BE in ED cum Quadrato EF , æquale Quadrato FD : vnde & Quadrato FC : ob idq; duobus Quadratis EF & EC , per quadragesimamseptimam Primi. Dempto igitur vtrinque Quadrato EF : erit quod fit ex BE in ED , æquale Quadrato EC . Qua-

re & ei quod fit ex AE in EC , quum ipsæ sint æquales, Quod erat probandum.

At si BD transiens per Centrum, secet AC inæqualiter: A Centro F ducatur FG perpendicularis ipsi AC : Et connectatur FC . Eritq; per quintam Secundi, quod fit ex BE in ED cum Quadrato EF (ob idq; per quadragesimamseptimam Primi, cum Quadratis FG & EG) æquale Quadrato FD : atque ob id, Quadrato FC : ob idq; duobus Quadratis FG & GC . Ablato ergo vtrinque Quadrato FG : erit quod fit ex BE in ED cum Quadrato GE , æquale Quadrato GC . At, per quintam Secundi, quod fit ex AE in EC cum Quadrato GE , æquale est Quadrato GC . Ablato igitur vtrinque Quadrato GE , erit quod fit ex BE in ED , æquale ei quod fit ex AE in EC , Quod erat probandum.



articulos diuidere.

QVONIAM verò hæc Demonstratio ex ijs est quæ non expeditè capiuntur: qui in similes incidet, studeat ipsas in suis Verbi gratia, in hoc postremo schemate sic ratiocinetur. Quod fit ex

fit ex BE in ED cum Quadrato EF , æquale est ei quod fit ex AE in EC cum eodem Quadrato EF . Quod igitur fit ex BE in ED , æquale est, per animi Notionem, ei quod fit ex AE in EC . Assumptio sic probatur. Quod fit ex AE in EC cum duobus Quadratis GE & GF (hoc est, cum Quadrato EF) est æquale duobus Quadratis GC & GF , per quintam Secundi & animi Notionem: ob idq; Quadrato FC . Sed quod fit ex BE in ED cum eodem Quadrato EF , probatum est æquale Quadrato FC . Quod igitur fit ex BE in ED cum Quadrato EF , æquale est ei quod fit ex AE in EC cum eodem Quadrato EF . Probata Assumptione, consequitur, ut ablato communi Quadrato EF , maneat id quod fit ex BE in ED , æquale ei quod fit ex AE in EC , Quod fuerat demonstrandum.

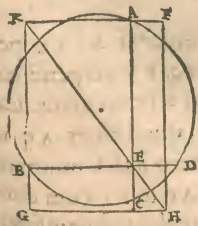
Iam verò, ut ad Propositionem reuertamur, si neutra linearum transeat per Centrum, siue æqualiter, siue inæqualiter se diuiserint: per punctum sectionis E , ducam Diametrum GH , in qua Centrum F . At tum si altera illarum diuidatur æqualiter, ut AC ab ipsa BD : diuidetur quoque ipsa AC æqualiter à Diametro CH : idq; per tertiam huius, ad angulos rectos. Quapropter, ex secunda specie huius Propositionis, quod fit ex GE in EH , æquum est ei quod fit ex BE in ED . Quod igitur fit ex AE in EC , æquum est ei quod fit ex BE in ED , Quod erat probandum.

At si neutra alteram æqualiter diuidat: erit ex tertia specie, quod fit ex GE in EH , æquale ei quod fit ex AE in EC : & æquale ei quod fit ex BD in ED . Quare vtrunque æquale alteri. Ac sic constat ex omni parte Propositio.

INTER eas quæ hoc Tertio libro demonstrantur Propositiones, hæc certè vna est ex præcipuis. Vsum enim habet varijs modis notabilem. In quam commentari pro dignitate longum esset. Capita igitur tantummodò aliqua seligemus, ut ex ijs ad alia meditanda viam aperiamus.

Primum itaque ex hac intueri licet Circuli vim & autoritatem. Qui quum lineas in Centro se scindentes, atque ex his producta æqualia, nempe Quadratas Figuras, in æqualitate contineat: idem iuris etiam retinet in reliquorum punctorum decussationibus. Nam quocunque in loco sese scindant lineæ: partes semper æqualia producta faciunt, ut modò ostendimus. Atque ex hoc multa in Geometriam dispersa sunt Theoremata & Problemata. Imprimis vltima Propositio Secundi, quæ dato Rectangulo æquale Quadratum componit. Si enim attentè inspexerimus secundam, quam in hac descripsimus, speciem: intelligemus Rectangulum compositum ex duobus lateribus BE & ED : quæ in vnâ lineam continuamus, qualis est BD : atque ex hac facimus Diametrum Circuli: & ex puncto diuisionis E , perpendicularem ducimus ad peripheriam, qualis hoc loco EA : quæ continuata ad punctum oppositum C , constituit AC lineam, bipartitò diuisam in E : ob idq; quod fit ex AE in EC , est Quadratum: & æquale ei quod ex BE in ED fit, Rectangulo.

Ex hac etiam deprompta est quadragesima tertia Primi, quam Gnomonicam vocauimus.

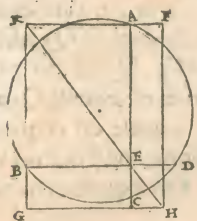


Sint enim in Circulo $ABCD$, duæ lineæ AC & BD , se scindentes in puncto E : sitq; quod fit ex AE in EC , Rectangulum $AEDF$: quod verò ex BE in ED , sit Rectangulum $BEGC$: commutatis partibus EC & ED , ut vides.

Quum itaque hæc duo Rectangula, in solo puncto E iuncta sint, & nutare quodammodo videantur: ea connectenda fuerunt, & stabilienda. Quod firmitus fieri non poterat, quàm perfecto Parallelogrammo $FHCK$, ductaq; Diametro HK . At tum duo Supplementa EF & EC apparent æqualia. In quo mira quædam re-

h 4 rum coll

rum colligatio & cōsecutio sese offert expendendam. Quod nos præterire cogimur, aliò properantes. Id vñum tamen dicemus, lineam GH tanto spatio egredi Circulum,



quanto KF eundem ingreditur: Et Diametrum HK tantum distare à Centro Circuli, quantum duo Parallelogramma HE & EK absunt à Quadratis. Si enim Quadrata essent, nempe si fuissent EC & ED æquales: totum FG , Quadratum esset, Circulo circumscriptum: ipsiusq; Diameter HK , eadem cum Circuli Diametro.

Hinc quoque desumptum est, vt super data linea, dato Rectangulo æquale Rectangulum constitueretur. Hic enini super linea BE , quam pro data sumimus, constituitur Rectangulum EG , æquale Rectangulo EF , quod etiam pro dato sumitur.

Ex hac etiam facilè habetur excessus Parallelogrammi maioris supra minus. Quid multa: ex hoc Theoremate innumerabiles considerationes, velut ex fonte quodam, emanant: quæ ad Proportionem pertinent. Quas, quum illuc ventum erit, poterit sibi Lector effingere, ex huius Propositionis recordatione.

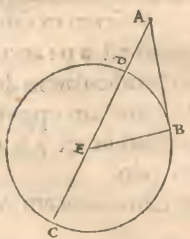
Neque miretur quisquam, quod priora cum posterioribus retexam. Id enim ad Demonstrationes eruendas tantum facio. Nam aliud est, artem tenere; aliudq; , artem docere. Multaq; priora sunt naturæ, quæ ars cogitur posteriora tradere: atque contrariò: nempe, aut compendij faciendi, aut lucis addendæ, aut denique methodi obseruandæ gratia.

THEOREMA 30, PROPOSITIO XXXV.

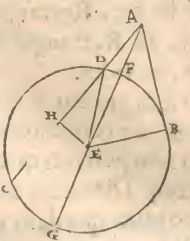
Theoni 36.

Si à puncto extra Circulum signato duæ lineæ ductæ fuerint, quarum altera secet Circulum, altera tangat: quod ex tota secante in partem sui extimam fit, Rectangulum, æquum est ei quod ex tangente fit, Quadrato.

Sit punctum A , signatum extra Circulum BCD , cuius Centrum E : ducanturq; duæ lineæ, ADC quidem Circulum secans in D puncto: & AB eundem tangens in B . Dico id quod fit ex tota AC in partem AD , esse æquale Quadrato AB .



Aut enim ADC transit per Centrum, aut non transit. Si transit: ducatur à Centro E ad punctum contactus B , linea EB : Quæ, per decimamseptimam huius, erit perpendicularis ipsi AB . Et quoniam linea DC diuisa est per æqualia in puncto E , additurq; ei linea DA : erit, per sextam Secundi, quod fit ex tota AC in partem AD cum Quadrato ED (ob idq; cum Quadrato EB) æquale Quadrato AE : atque ob id, Quadratis duarum AB & EB . Dempto igitur communi Quadrato EB : erit quod fit ex AC in AD , æquale Quadrato AB , Quod erat probandum.



Si verò AC non transit per Centrum, ducatur AFC per Centrum E : Et connectatur ED : Ducaturq; EH perpendicularis ad AC . Et erit DH æqualis HC , per tertiam huius. Itaque, per sextam Secundi modò inductam, quod fit ex AC in DC cum Quadrato DH , æquale est Quadrato AH . Commune addatur Quadratum HE : Erit quod fit ex AC in DC cum duobus Quadratis DH & HE (ob idq; , per quadragessimamseptimam Primi, cum Quadrato EF , nam id sumo loco ED) æquale duo

le duobus AH & HE Quadratis: ob idq; Quadrato AE , per eandem quadragesimamseptimam. At quod fit ex AG in FG cum ipso EF Quadrato, æquale est eidem Quadrato AE . Quod igitur fit ex AC in AD cum Quadrato EF , æquale est ei quod ex AG in FG cum eodem EF Quadrato. Ablato itaque communi EF , erit quod fit ex AC in DC æquale ei quod ex AF in FG : Quare & Quadrato AB , vt modò probauimus, Quod fuit demonstrandum.

Confectaria ex Campano.

Si ab eodem puncto extra Circulum signato, plures lineæ Circulum secant: quæ ex vnaquaque in sui partem extimam fiunt Rectangula, inter se sunt æqualia.

Hoc autem ex eo manifestum est, quòd singula huiusmodi Rectangula sint æqualia Quadrato lineæ ab illo puncto ductæ ad contactum Circuli, per hanc trigessimamquintam. Ex hoc etiam addit.

Si duæ lineæ ab eodem puncto ductæ Circulum tangent, ipsæ inter se sunt æquales.

Quod quanuis Demonstratione non egeat, quum vtraque sit æqualis ei quod fit ex lineæ, quæ ab eodem punctoeducta Circulum secat in sui partem extimam: ipse tamen sic probat.

Sit punctum A extra Circulum BCD , cuius Centrum E : ducanturq; duæ lineæ AB & AD , quæ Circulum tangent in punctis B & D . Dico ipsas esse æquales.



Ducam lineas EB & ED . Eritq; per decimamseptimam huius, vterque angulorum B & D rectus: quapropter Quadratum AE , per quadragesimamseptimam Primi, æquale duobus Quadratis AB & EB : similiter & duobus AD & ED . Igitur duo AB & EB Quadrata, sunt æqualia duobus AD & ED Quadratis. Et quia EB & ED sunt æqualia: erunt duo reliqua AB & AD æqualia. Quare AB æqualis AD , Quod erat ostendendum.

Idem rursus. Connectatur lineæ BD . Eritq; per quintam Primi, angulus EBD æqualis angulo EDB . Et quia duo ABE & ADE anguli sunt æquales, nempè recti: ablati æqualibus EBD & EDB , erunt duo ABD & ADB æquales. Quare, per sextam Primi, erit AB ipsi AD æqualis. Nos etiam hæc addemus,

A puncto extra Circulum signato, duæ tantum lineæ ad contactum Circuli deduci possunt.

Stante postrema descriptione, à puncto A in Circulum BCD dico non posse deduci plures contingentes, quàm duas AB & AD .

Quòd si fieri possit, educatur AF , contingens Circulum in puncto F : & connectatur EF . Eritq; angulus F rectus, per decimamseptimam huius: Quapropter æqualis angulo EBA , repugnante vigesima Primi.

Id etiam ea ratione probabitur: quòd omnes lineæ ab vno puncto ductæ, Circulum tangentes, sint æquales: vt antè ostendimus. At duæ AB & AF æquales esse non possunt, aduersante octaua huius.

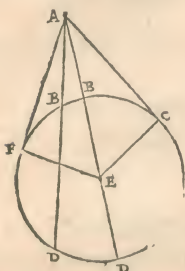
THEOREMA 31, PROPOSITIO XXXVI.

Theoni 37.

Si à puncto extra Circulum signato, duæ lineæ in Circulum

culum ceciderint, quarum altera ipsum secet, altera ei applicetur: sit autem quod ex tota secante in sui partem extimam fit Rectangulum, æquale ei quod ex applicata fit Quadrato: Applicata Circulum tangit.

Sit punctum A, signatum extra Circulum B C D, cuius Centrum E: cadantq; ab A puncto duæ lineæ, A B D quidem Circulum secans, & A C ipsi Circulo applicata: sitq; quod fit ex A D in A B, æquale ei quod fit ex A C Quadrato. Dico lineam A C tangere Circulum. Conuersa antecedentis.



Primum enim si linea A B D transsit per Centrum, ducatur recta C E. Et erit, per sextam Secundi, quod fit ex A D in A B cum Quadrato E B, ob idq; cum Quadrato E C, æquale Quadrato A E. At quod fit ex A D in A B, ponitur æquale Quadrato A C. Et Quadratum igitur A C cum Quadrato C E, æquale est Quadrato A E. Igitur, per vltimam Primi, angulus C rectus. Quare, per decimamquintam huius, linea A C contingit Circulum.

Quod si A B D non transsit per Centrum, ducatur à puncto A, linea A D, in qua Centrum E. Et quia quod fit ex hac tota in sui partem extimam, æquum est ei quod fit ex A D in A B, per antecedentem: erit idipsum, ex communi Notione, æquale Quadrato A C. Quapropter E C A angulus, rectus est: ex ijs quæ modò probauimus. Ob idq;, A C contingens Circulum, Quod erat demonstrandum.

A L I T E R. Mancat iam inducta descriptio: atque insuper à puncto A ad alteram partem Circuli demittatur A F, per decimamsextam huius, contingens Circulum. Et connectatur E F. Eritq; angulus F rectus, per decimamseptimam: Et per antecedentem, quod fit ex A D in A B, æquale Quadrato A F. At ex hypothesi, idipsum est æquale Quadrato A C. Est igitur A C linea æqualis A F. Quapropter quum duo latera A F & E F, Trianguli A E F, sint æqualia duobus A C & E C, Trianguli A E C: & basis A E vtrique communis: sitq; angulus F rectus: erit & angulus C rectus, per octauam Primi. Quare A C tangit Circulum, per Confectarium decimæquintæ huius, Quod erat demonstrandum.

Libri Tertij Geometricorum Elementorum

F I N I S.





IACOBI PELETARII

CENOMANI IN EVCLIDIS

ELEMENTA GEOMETRICA

DEMONSTRATIONVM

LIBER QVARTVS.



DEFINITIONES.

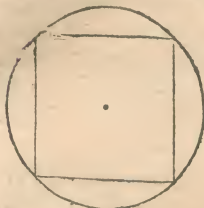


Figura Rectilinea, in altera Rectilinea inscribi dicitur, quum singuli inscriptæ Figuræ anguli, singula eius in qua inscribitur, latera tangunt.

- 2 Figura verò circa Figuram, quum singula latera circumscriptæ, singulos eius circa quam describitur, angulos tangunt.

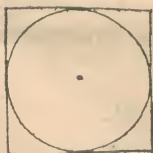


Satis constat Rectilineas Figuras eiusdem speciei, alias alijs inscribi aut circumscribi: vt Triangulum Triangulo, Quadrilaterum Quadrilatero: non diuersæ. Si enim plures sint anguli vnus, quàm latera alterius, aut contrâ: non erit mutuus contactus singulorum, vt oportet.



- 3 Figura Rectilinea in Circulo describi dicitur, quum omnes ipsius anguli, Peripheriam tangunt:

- 4 Circulus verò circa Figuram Rectilineam, quum ipsius Peripheria omnes interioris Figuræ angulos tangit.



- 5 Circulus in Figura Rectilinea describi dicitur, quum ipsius Peripheria singula interioris Figuræ latera tangit.

- 6 Figura verò Rectilinea circa Circulum, quum ipsius singula latera, Circuli Peripheriam tangunt.



- 7 Recta linea in Circulo accommodari dicitur, quum ipsius extrema in Circuli Peripheriam cadunt.

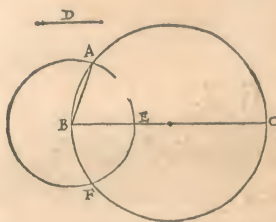
PRO

PROBLEMA PRIMVM,
PROPOSITIO PRIMA.



IN dato Circulo, datæ lineæ rectæ quæ Circuli Diametro minimè maior existat, æquam lineam rectam accommodare.

Sit datus Circulus ABC , cuius Diameter BC : data verò linea D , quæ maior non sit ipsa BC . Volo in Circulo ABC aptare lineam, lineæ D æqualem.



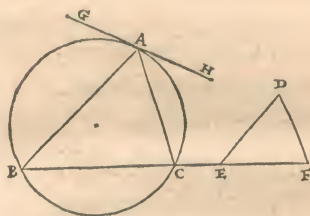
Si D est ipsi BC æqualis, constat propositio. Si minor: abscindatur ex BC , pars BE æqualis ipsi D : & secundum spatium BE , describatur Circulus AFA , secans Circulum ABC in punctis A & F . Et connectatur AB : quæ, per secundam Tertij, secat Circulum $ABCA$: estq; ipsi BE æqualis, ex definitione Centri: Quare & ipsi D lineæ æqualis, Quod erat faciendum.

ETIAM nulla Diametro posita, aptabitur linea. Tantum in puncto Peripheriæ fortuito ponatur Centrum: ac secundum longitudinem lineæ datæ describatur alter Circulus, datum Circulum secans.

PROBLEMA 2, PROPOSITIO II.

In dato Circulo, Triangulum dato Triangulo æquiangulum describere.

Sit datus Circulus ABC , datum verò Triangulum, DEF . Volo in Circulo ABC describere Triangulum, Triangulo DEF æquiangulum.



Per punctum A duco GH , quæ tangat Circulum in ipso A , per decimasextam Tertij. Et duco rectam AB in Circulum, quæ cum GA faciat angulum BAC , æqualem angulo F : itemq; ducta AC , facio angulum CAH æqualem angulo E : Et connecto BC . Dico ABC Triangulum, esse Triangulo DEF æquiangulum.

Est enim angulus B , per trigessimamprimam Tertij, æqualis angulo CAH : ob id, & angulo E . Eadem ratione angulus C æqualis est angulo BAG : ob id, & angulo F . Reliquus igitur BAC , per trigessimamsecundam Primi, reliquo D æqualis. Quare Triangulum BAC , ipsi DEF æquiangulum, Quod faciendum fuit.

PROBLEMA 3, PROPOSITIO III.

Circa datum Circulum, dato Triangulo æquiangulum Triangulum describere.

Sit datus Circulus ABC , datum verò Triangulum DEF . Volo ipsi ABC Circulo circumscribere Triangulum, ipsi DEF Triangulo æquiangulum.

Protraham basin EF vtrinque, vt fiant duo extrinsecus anguli E & F . Tum à Centro Circuli, quod sit G , educam GB ad Peripheriam. Et ab eodem G punctoeducta CA , constituam angulum BCA , æqualem angulo E exteriori. Similiter educta CC ,

Ita $g c$, faciam $B g c$ angulum, æqualem angulo F exteriori. Tum per puncta A, B , & c ducam lineas $h k$, $h l$, & $k l$, ad rectos angulos cum Semidiamentris $A g$, $B g$, & $c g$. Atque harum vnaquæque, per decimam quintam Tertij, tangat Circulum: Et protractæ, omninò cõcurrent, vt in punctis h, k, l : Quum enim vterque angulorum qui est ad A , & vterq; qui ad B , sit rectus: linea quæ ducetur ab A ad B , efficiet cum $h k$ & $l k$, duos angulos versus k , minores duobus rectis (quia vterque pars recti). Itaque, per quintam Petitionem, concurrent $h k$ & $l k$. Atque eadem ratione concurrent $h l$ & $k l$: quum vterque angulorum qui ad c , sit rectus: fietq; Triangulum $h k l$. Quod dico esse æquiangulum Triangulo $D E F$.

Quoniã enim in Quadrilatero $A g B k$, duo anguli A & B sunt recti: erũt duo reliqui g & k , duobus rectis æquales: sunt enim cuiuslibet Quadrilateri, quatuor anguli quatuor rectis æquales: vt ostensum est ad trigessimam secundam Primi. Atqui duo anguli qui ad E , sunt duobus rectis æquales, per decimam tertiam Primi. Quum igitur angulus g positus sit æqualis angulo E exteriori: erit angulus k , æqualis angulo E interiori. Eadem ratione erit angulus l æqualis angulo F interiori. Quare, per trigessimam secundam Primi, reliquus h , reliquo D æqualis. Et totum Triangulum toti Triangulo æquiangulum, Quod erat probandum.

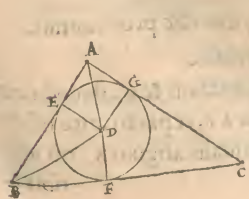
ALITER. Sit, vt prius, Circulo $A B c$ Triangulum circumscribendum, Triangulo $D E F$ æquiangulum.

In ipso $A B c$ Circulo, inscribo Triangulum $g h k$, ipsi $D E F$ æquiangulum, per antecedentem: vt sit angulus g æqualis angulo D : angulus h , angulo E : & angulus k , angulo F . Duco postmodum $l m$ parallelum ipsi $g h$: quæ tangat Circulum in puncto A : per ea quæ addidimus ad decimam sextam Tertij. Duco similiter $m n$ parallelum ipsi $h k$, & contingentem Circulum in B : itemq; $l n$ parallelum ipsi $g k$, cõtingentem Circulum in c . Atque hæ tres lineæ omninò concurrent, vt ad puncta L, M , & N : quod patebit productis vtiq; lineis $g h$, $g k$, & $h k$, donec secent $l m$, $l n$, & $m n$ in punctis O, P, Q, R, S, T . Dico iam $L M N$ Triangulum Circulo $g h k$ circumscriptum, esse æquiangulum Triangulo $D E F$. Est enim euidenter æquiangulũ Triangulo $g h k$, per legem parallelorum quum angulus $m t q$ sit æqualis angulo g , Trianguli $g h k$, ex vigesimanona Primi: ob id, & angulus L eidem g equalis, per eandem. Sic & angulus M , angulo h eiusdem Trianguli: & angulus N , angulo k . Totum igitur $L M N$ Triangulum, toti $g h k$ Triangulo æquiangulum: quapropter & ipsi $D E F$, Quod erat faciendum.

Hæc constructio ex ijs est, quæ licet tædiosæ videantur: tamen ob concinnitatem faciles sunt. Vnica etiam Propositione, nempe vigesimanona Tertij, probatur.

PROBLEMA 4; PROPOSITIO IIII.

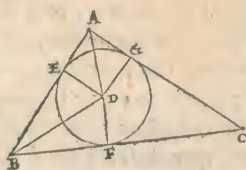
In dato Triangulo Circulum describere.



Sit datum Triangulum $A B c$, in quo describendus sit Circulus. Diuido duos ipsius angulos A & B æqualiter, per nonam Primi, ductis lineis $A d$ & $B d$: quæ concurrent intra Triangulum in puncto D . A quo ad tria latera ipsius $A B c$ Trianguli, ducam tres perpendiculares $D E$, $D F$, & $D G$.

i Er quo

Et quoniam duorum Triangulorū AED & AGD , duo anguli qui ad A , sunt æquales, duoq; anguli E & G recti, & latus AD commune: erit, per vigesimam sextam Primi, linea DE æqualis lineæ DG . Rursum quum duorum Triangulorum BED & BFD , duo anguli qui ad B , sint æquales, anguliq; E & F recti, & latus BD commune: erit, per eandem, linea DE æqualis lineæ DF . Quapropter tres lineæ DE , DF , & DG , æquales. Posito itaque Centro in D , Circulus descriptus secundum cuiuscunque ipsarum intervallum, transibit per extremitates reliquarum duarum, ex nona Tertij. Et quia, per Confectarium decimæ quintæ eiusdem, vnaquæque linearum AB , AC , & BC tangit Circulum, quia perpendicularis ad extremum Semidiametri: constat Propositio.



PROBLEMA 5, PROPOSITIO V.

Circa datum Triangulum, Circulum describere.

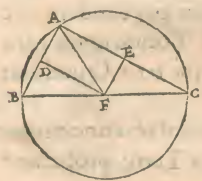
Sit datum Triangulum ABC , circa quod describendus sit Circulus.

Duo ipsius latera diuido æqualiter: AB quidem in puncto D , & AC in puncto E . Tum excito perpendiculares ab ipsis D & E punctis: quæ protractæ concurrent, ut ad punctum F . Nam si intelligatur duci linea DE ab angulis rectis D & E : ipsa efficiet angulos versus F , minores duobus rectis. A puncto itaq; concursus F , quod dico esse Centrum Circuli, ducio ad tres angulos Trianguli A, B, C , lineas FA, FB & FC . Quumq; duo latera AD & DE , Trianguli ADF , sint æqualia duobus lateribus BD & DF , Trianguli BDF : & angulus D unus, æqualis angulo D alterius, nempe uterque rectus: erit, per quartam Primi, FA æqualis FB . Eadem ratione, comparato AEF Triangulo cum CEF : erit eadem FA æqualis ipsi FC . Tres igitur FA, FB , & FC æquales. Quare, per nonam Tertij, erit F Centrum Circuli, Quod erat constitutum.



$H\alpha c$ est in vniuersum Circuli Triangulo circumscribendi constructio. Sed nominatis Triangulorum speciebus, sic erit faciendum.

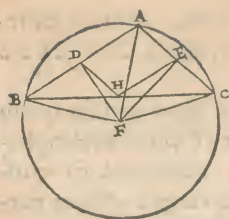
Ac primum, sit Triangulum ABC Rectangulum, cuius angulus A rectus. Diuido latus BC angulo recto oppositum, per æqualia, in puncto F . A quo ad media puncta duorum AB & AC , ducio FD & FE : quarum quum FD fecerit duo latera AB & BC æqualiter: ipsa erit tertio AC æquidistans: ut demonstratum est ad trigessimam nonam Primi: Eademq; ratione erit FE æquidistans AB . Et quia totus A angulus rectus est: erunt & anguli qui ad D & E , recti: per vigesimam nonam Primi. Ducta itaque FA , erunt duo latera AD & DE , Trianguli ADF , æqualia duobus BD & DF , Trianguli BDF . Ob id, quum uterque angulus qui ad D , sit rectus: erit, per quartam Primi, FA æqualis FB , quapropter & ipsi FC . Tribus igitur FA, FB , & FC æqualibus, erit F Centrum Circuli, Quod fuit constitutum.



Sed & id constabat ex primo capite trigesimæ Tertij, ut nos illic probauimus.

Sed sit Triangulum Amblygonium, cuius angulus A obtusus.

Diuido latus BC bipartitum in puncto H . A quo ad media puncta D & E , ducio lineas HD & HE . Et erit HD æquidistans AC : & HE æquidistans AB , ut paulo ante ostendimus. Quapropter uterque angulorum BHD & CEH , æqualis angulo A : ob idq;, obtusus



trum Circuli, vt prius.

Sit iam ABC Oxygenium. Ac diuisis tribus lateribus, vt in superioribus, per æqualia in punctis DEH : connecto DE , DH , & EH . Eritq; vt prius, DH æquidistans AC : & EH , æquidistans AB : ob idq; per vigesimam nonam Primi, vterq; angulorum

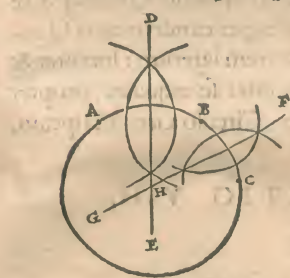


BDH & CEH , æqualis angulo A : sicq; acutus. Ductis igitur perpendicularibus, DF quidem ad AB , & EF ad AC , quæ concurrunt intra Triangulum ABC ad punctum F : connectantur FA , FB , & FC . Quæ, per quartam Primi bis sumptam, vt in superioribus, erunt æquales. Quare F , vt prius, erit Centrum Circuli, Quod erat faciendum.

Modi igitur omnes in primum recidunt: nempe vt diuisis duobus lateribus Trianguli bifariam, ducantur à duobus punctis diuisionum perpendiculares: & in concursu ambarum statuatur Centrum Circuli.

Hinc manifestum est, Triangulum, cuiusmodicunque sit, id priuilegij habere, quod ipsi Circulo inscribi & circumscribi possit. In Circulis autem inscribendis, diuiduntur anguli: circumscribendis, latera.

Ex eadem hac depromptum est compendium illud artificibus vsitatum,



Per tria data puncta in directam lineam minime constituta, Circulum ducere.

Vt, si sint tria puncta A , B , & C : hæc intelliguntur esse connexa per lineas rectas in Triangulum: diuiditurq; bifariam spatium inter A & B : itidem spatium inter B & C : & educuntur à punctis diuisionum, duæ perpendiculares: quales hoc loco sunt DE & FG , secantes se in H Centro. Quod fit Circuli officio: sicut ante demonstrauius, ad vigesimam quartam Tertij.

Consuetarium.

Si fuerit Triangulum Orthogonium: cadit Centrum Circuli in medium latus recto angulo oppositum: si Ambligonium, extra Triangulum: si Oxygenium, intra. Si verò Centrum in medium latus ceciderit, Orthogonium est Triangulum: si extrinsecus, Ambligonium: si introrsum, Oxygenium.

Quod manifestum est, ex ijs, quæ iam demonstrata sunt.

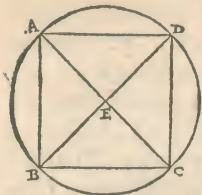
PROBLEMA 6, PROPOSITIO VI.

In dato Circulo Quadratum describere.

Sit datus Circulus $ABCD$, cuius Centrum E . Volo in ipso Circulo Quadratum inscribere.

i 2 Duco

Duco duas Diametros se ad angulos rectos secantes in E Centro : quarum extrema connecto quatuor lineis AB , BC , CD , & DA . Dico $ABCD$ esse Quadratum.



Erunt enim, per quartam Primi, quatuor latera æqualia: quum sint bases quatuor laterum æqualium, quæ à Centro ad Peripheriam exeunt, æqualesq; angulos qui ad E , continent. Et vnusquisque quatuor angulorum A , B , C , D rectus, per primam partem trigessimæ Tertij: quum sint in Semicirculo. Quadratum igitur est $ABCD$, Quod erat faciendum.

QVI à Centro originem Quadrati ducunt, duas lineas ad angulos rectos se scindentes, hinc inde ad Peripheriam continuant, & quatuor bases connectunt. Ac tum per semirectos ratiocinantur. Quod in idem recidit.

PROBLEMA 7, PROPOSITIO VII.

Circa datum Circulum, Quadratum describere.

Sit datus Circulus $ABCD$, cuius Centrum E . Circa hunc volo Quadratum describere.

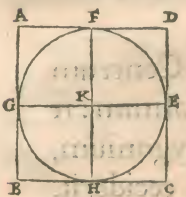
Duco duas Diametros AC & BD , se scindentes in Centro E ad angulos rectos. Tum per quatuor ipsarum extrema A , B , C , D , duco quatuor perpendiculares FG , GH , HK , & KF , sibi inter se occurrentes ad quatuor puncta F , G , H , K . Eruntq; per vigesimam octauam Primi, FG & HK inter se, & ipsi AC æquidistantes: quum in ipsas cadat BD vtrinque ad angulos rectos. Itidem FK & GH , inter se & ipsi BD æquidistantes: Quapropter, ex trigesima quarta eiusdem bis sumpta, erunt quatuor anguli F , G , H , K recti, quia rectis oppositi. Quumq; duæ FG & HK sint Diametro AC æquales, per eandem: quia Quadrilatera FC & AK , sunt æquidistantium laterum: similiter & duæ FK & GH , Diametro BD æquales: erunt omnes inter se æquales, propter æqualitatem Diametrorum. Quare $FGHK$ Quadratum, Circulo circumscriptum, Quod erat faciendum.



PROBLEMA 8, PROPOSITIO VIII.

In dato Quadrato, Circulum describere.

Sit datum Quadratum $ABED$, intra quod describendus sit Circulus.

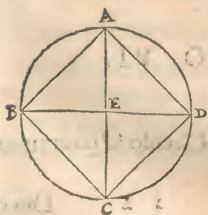


Diuido quatuor ipsius latera æqualiter in punctis E , F , G , H : ducta GE parallelo & æquali ipsis AD & BC : itemq; FH parallelo & æqualis ipsi AB & CD : quæ secet GE in puncto K : Quod dico esse Centrum Circuli. Sunt enim quatuor dimidia KE , KF , KG , & KH , per trigesimam quartam Primi, æqualia quatuor dimidijs lateribus ipsius Quadrati: ob id, & inter se æqualia. Quare, per nonam Tertij, K est Centrum Circuli inscribendi, Quod erat constitutum.

PROBLEMA 9, PROPOSITIO IX.

Circa datum Quadratū, Circulū describere.

Sit datum Quadratum $ABED$, circa quod describendus sit Circulus.

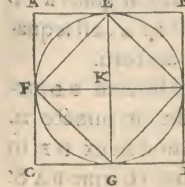


Duco duas Diametros AC & BD , secantes se in puncto E : idq; æqualiter, per sextam Primi: quia binis quique anguli qui ad A , B , C , D sunt semirecti, per quintam & trigesimam secundam

dam eiusdem. Quare E est Centrum Circuli circumscribendi, Quod erat faciendum.
 SUB has Quadrati & Circuli mutuas inscriptiones visum est adscribere peruulgatum hoc Theorema;

Quadratum Circulo circumscriptum, duplum est Quadrati eidem Circulo inscripti.

Sit Quadratum $ABCD$ circumscriptum Circulo $EFGH$, cuius Centrum K : sintq; puncta contactuum, E, F, G, H . Et ductis duabus Diametris EG & FH , inscribatur ipsi Circulo, per sextam huius, Quadratum $EFGH$. Dico $ABCD$ Quadratum, esse duplum ipsius $EFGH$ Quadrati.



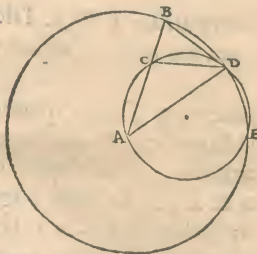
Nam quum latus AB maioris Quadrati, sit, per trigessimam-quartam Primi, æquale FH Diametro Quadrati minoris: Quadratum autem ipsius FH duplum sit Quadrati cuius est Diameter, scilicet Quadrati $EFGH$, per quadragesimamseptimam Primi: erit & Quadratum ipsius AB , quod est $ABCD$, duplum Quadrati $EFGH$, Quod erat ostendendum.

POSSET alijs expositionibus demonstrari, vt ex æqualitate Triangulorum & Quadratorum: Sed nos hac vna contenti fuimus facili & compendiosa ostensione. Hoc autem Theorema ab Euclide non fuit appositum, fortassè quòd sola Problemata in hoc Quarto libro tractaret: fortasse etiam quòd de aliarum Figurarum proportionem tradendum fuisset: quanuis tamen hanc ordinis rationem non seruet. Paucas enim Figuras Circulo inscribere docet, ceteras prætermittit: infinitatem quidem deuittans, sed & difficultate deterritis. Idipsum verò, vt cuius consideratio esset vñtata, hic apponere non dubitauimus.

THEOREMA 10, PROPOSITIO X.

Isofceles Triangulum constituere, habens vtrunque eorum qui ad basin sunt angulorum, duplum anguli qui ad verticem.

Sumatur ad arbitrium, linea AB : quæ sic diuidatur in puncto C vt docet vñdecima Secundi: scilicet vt quod sit ex AB in BC , sit æquale Quadrato AC . Tum posito Centro in A , describatur interuallo AB , Circulus $BDEB$: In quo, per primam huius, accommodetur linea BD æqualis AC : Et connectantur DA & DC . Dico vtrunque angulorum ABD & ADB , Trianguli ABD , esse duplum anguli A .

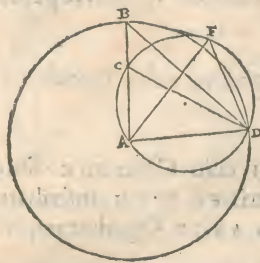


Ac primùm satis constat Triangulum esse Isofceles quum duo AB & AD latera sint ex Centro: ac propterea duos angulos ABD & ADB esse æquales, per quintam Primi. Iam circa Triangulum ACD describo Circulum $DCAD$, per quintam huius. Et quia BD est æqualis AC : erit quod sit ex AB in BC , æquale Quadrato BD : ac propterea BD tangit Circulum, per vltimam

Tertij. Et angulus CDB , per trigessimamprimam eiusdem, æqualis est angulo alterno CAD . Posito itaque cõmuni angulo CDA , erit totus BDA angulus, æqualis duobus CAD & CDA . At angulus BCD , per trigessimamsecundam Primi, æqualis est ipsi CAD & CDA , duobus interioribus oppositis. Erit igitur BCD toti BDA æqualis: ob id, & ipsi ABD . Quare, per sextam Primi, linea CD æqualis lineæ BD : ob id, & lineæ CA . Angulus igitur CDA , per quintam Primi, æqualis est angulo CAD : ob idq; angulo CDB . Duplus itaque est angulus BDA , anguli BAD : Quare & angulus ABD

i 3 duplus

duplus eiusdem, Quod erat faciendum.

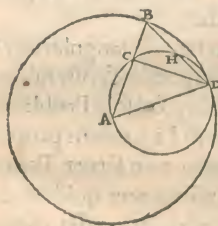


APPENDIX Campani. Forſan contendet aliquis Circulum ACD ſecare Circulum BDE in puncto aliſquo Arcus BD , ſimulq; ſecare lineam BD : quò fiet vt BD linea non ſit Circulo ACD applicata: vt in Demonſtratione aſtruitur, ſed ipſum ſecans.

Secent igitur inter ſe, ſi fieri poſſit, ducaturq; à puncto B , linea BF tangens Circulum ACD : Et connectantur FA & FD : Eritq; per trigefimamquintam Tertij, quod fit ex AB in BC , æquale Quadrato BF : ob idq; BF æqualis BD : Vnde, per quintam Primi, angulus BFA

æqualis angulo BDF . Et quia, per trigefimamprimam Tertij, angulus BFA , eſt æqualis angulo ADF alterno: erit angulus BDF maior angulo ADF , pars toto.

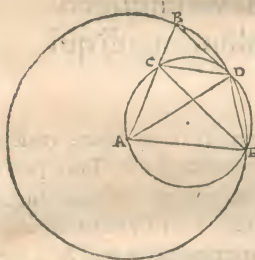
Refellit & idem aliter. Nam ſi fortè dicatur Circulus ACD ſecare lineam BD , neque tamen ſecare Arcum BD maioris Circuli: Secet ipſam, ſi poſſit, in puncto H .



Eritq; quod fit ex AB in BC , æquale ei quod fit ex DB in BH , per trigefimamquintam Tertij: quum vtraque BA & BD ab eodem puncto B , cadat ad ſectionem Circuli. Et quia quod fit ex AB in BC , æquale eſt Quadrato BD : erit quod fit ex DB in BH , æquale eidem Quadrato DB : repugnante ſecunda Propositione Secundi.

Sed hæc fruſtrà in dubitationem adducuntur à Campano. Linea enim BD non tantum aſtruitur in Demonſtratione tangere Circulum ACD , ſed etiam probatur.

AT notabilius eſt quod ipſe ſubiicit, Duos Circulos ACD & BDE ſe mutuo ſecare: & Circulum ACD abſcindere à Circulo BDE Arcum æqualem Arcui BD : Circulum verò BDE , abſcindere à Circulo ACD Arcum æqualem Arcui DC .



Prior pars conſtat ex eo, quòd ſi minor non ſecet maiorem, ſed tangat ipſum in puncto D : erit, per vndecimam Tertij, Centrum vtriuſque in linea vna, ſcilicet in AD : propterea quòd in ipſa eſt Centrum maioris, & in eadem punctum contactus. Erit igitur angulus ACD , per trigefimam Tertij, rectus: & per decimamtertiam Primi, angulus DCB rectus: ſicq; ABD rectus, vt potè huic æqualis, Quod, per trigefimamſecundam Primi, fieri non poteſt.

Secabunt igitur inter ſe, vt in punctis D & E . Dico iam Arcum ED maioris, eſſe æqualem Arcui DB : & Arcum ED minoris, æqualem Arcui DC .

Connecto EA , EC , & ED . Eruntq; per vigefimamſextam Tertij, quatuor anguli DEC , CEA , EAC , & ADC , æquales: quum ſint Arcus CA & CD æquales, per vigefimamſeptimam eiufdem. Totus itaque angulus AED duplus eſt anguli BAD : ob idq; æqualis vtrique angulorum ABD & ADB . Et quia angulus AED æqualis eſt angulo ADE , per quintam Primi, quoniam AD & AE ſunt à Centro: erunt duo anguli E & D , Trianguli AED , æquales duobus angulis D & B , Trianguli ADB : ob id, per trigefimamſecundam Primi, reliquus angulus A vnus, æqualis reliquo angulo A alterius. Quare, per vigefimamſecundam Tertij, Arcus ED maioris, æqualis Arcui DB : Et, per eandem, Arcus ED minoris, æqualis Arcui DC , Quod erat probandum.

SVPER hæc, obſeruandum, In omni Triangulo, quale hoc loco eſt ABD , angulum verticis, vt hic angulum A , eſſe vnam tertiam cum vna quinta vnus tertie recti:

recti: hoc est, duas quintas vnus recti: ac breuiter, vnam quintam duorum rectorum. Vtrunque verò angulorum qui ad basin, esse duas quintas duorum rectorum. seu quatuor quintas vnus recti. Quod clarum est, diuisis duobus angulis rectis in partes quintas. Tum enim in Triangulo, angulus verticis erit vnus quinta: & vteruis duorum qui ad basin, duarum quintarum. Hæc autem diuisio lineæ AB , qualis est in puncto c , dicetur ab Euclide in trigesima Sexti, proportio secundum mediam & extremam rationem: utpotè quum AC sit medium proportionale inter BC & BA . In qua quidem, numerus Quinarius præcipuam habet vim. Nam in omni quantitate quæ sic diuiditur, Quadratum totius iungitur cum Quadrato dimidiæ: Quod aggregatum perpetuò est quintuplum Quadrati ipsius dimidiæ. Id verò ex ea quam proposuimus specie in vndecima Secundi, repetemus. Sint 8 diuidenda sicut proponitur. Ducto 8 in se, sunt 64: Ducto etiam eius dimidium nempe 4, quanta est illic linea DE aut EB , in se: sunt 16. Hæc iuncta, scilicet 64 & 16 faciunt 80, quintuplum 16. Itaque ad huiusmodi Triangulum inuestigandum, opus fuit tali diuisione lineæ: cui præest Quinarius numerus. Hoc igitur Problema ad Pentagonum Circulo inscribendum spectat: ut in sequenti Propositione docetur.

A T Q V E animaduertendum, lineam AC , esse latum Pentagoni æquilateri, Circulo ACD inscribendi. Quod sic demonstratur,

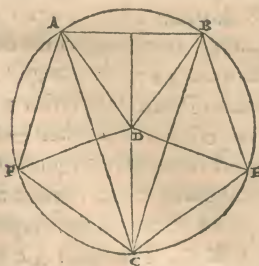
Ex posteriori constructione constitit, tres Arcus AC , CD , & DE minoris Circuli, esse æquales. Quinque ex eadem constiterit duas lineas AD & AE esse æquales: erit & Arcus AE æqualis Arcui AD , per vigesimamseptimam Tertij: quapropter eorū dimidia æqualia. Si igitur AE diuidatur æqualiter, erit tota Peripheria $ACDEA$ diuisa in quinque Arcus æquales. Quorum quum subtensæ sint æquales, per vigesimam octauam eiusdem: erit vnaquæque illarum latus Pentagoni, Quod erat demonstrandum. Et erit idem AC , latus Decagoni, Circulo BDE inscribendi: quod ad sequentes Demonstrationes pertinet. In summa, hæc omnia ex Proportionibus dependent. Et ut nostrum de hac tota re iudicium ingenuè explicemus, huic tractationi Proportiones erant præmittendæ.

Nos huic loco hoc subnectemus Problema.

Super data recta linea Pentagonum æquilaterum & æquiangulum conscribere.

Sit super data linea AB constituendum Pentagonū æquilaterū & æquiangulum.

Super ipsa AB constituo, per vigesimamtertiam & trigesimamsecundam Primi, Triangulum Isosceles ABC , quale proponit hæc decima: ut scilicet super basi AB , duo anguli CAB & CBA , sint æquales duobus modò constructis: nempe vterque duæ quintæ duorum rectorum, & angulus verticis c vna quinta eorundem. Diuido postmodum angulum c æqualiter, ducta linea CD : Ac super puncto A constituo angulum CAD , æqualem angulo ACD : ducta linea AD , quæ concurrat cum CD ad punctum D : idq; intra Triangulum ABC : nam CD protracta cadet in basin AB , & AD in latus BC . Tum connecto DB .



Et quia in Triangulo ACD , duo anguli A & c sunt æquales: erunt, per sextam Primi, duo AD & CD latera æqualia. Rursus quia duo latera CB & CD , Trianguli CBD , sunt æqualia duobus CA & CD , Trianguli ACD , & angulus c huius, æqualis angulo c illius: erit, per quartam Primi, basis DB basi DA , sicq; lineæ DC , æqualis. Erit igitur, per nonam Tertij, D Centrum Circuli.

Et ducatur Circulus $ABECF$. Iamq; angulus ADB duplus est anguli ACD , per decimamnonam Tertij: Ipse igitur ADB angulus facit duas quintas duorū rectorum: hoc est, vnam quintam quatuor rectorum. Quum itaque spatium circa D Centrum,

i 4 sit

fit æquale quatuor rectis angulis: omnino diuidetur spatium ipsum in quinque angulos, æquales ipsi ADB , nempe in quinque quintas: ductis lineis DE & DF , quæ cum DA , DB , & DC æqualitatem quinariam distinguant. Connexisq; AF , FC , CE , & EB , erit Rectilineum $ABECF$, Pentagonum æquilaterum, per legem Centri & Peripheriæ, adhibita quarta Propositione Primi: Et æquiangulum, per quartam & quintam eiusdem: quum quinque anguli A , B , E , C , F , diuidantur in decem æqualia, Quod erat faciendum.

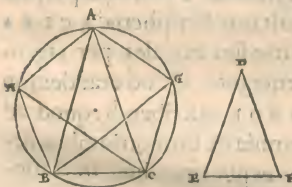
Hoc Problema Bouillus ideò difficile putauit, quòd ab Euclide esset prætermis- sum. Sed & cæteras Figuras quarum posteriùs inscriptio demonstranda est, super data linea facillè construet, qui hanc nostram perspexerit Demonstrationem.

PROBLEMA II, PROPOSITIO XI.

In dato Circulo Pentagonum æquilaterum & æquian-
gulum describere.

Sit datus Circulus ABC , cui inscribendum sit Pentagonum æquilaterum & æquiangulum.

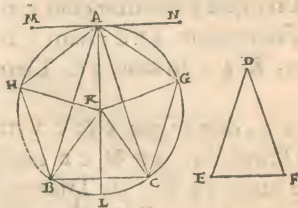
Construatur Triangulum Iosceles DEF , quale præscripsit antecedens Proposi- tio: Et in dato Circulo inscribatur Triangulum ABC , ipsi DEF æquiangulum, per secundam huius: ut scilicet uterque angulorum B & C duplus sit ad angulum ver- ticis A . Horum utrunque diuido æqualiter, ductis li- neis BC & CH hinc atque hinc ad Peripheriam.



Eritq; totus Circulus in quinque Arcus diuisus, in punctis A , H , B , C , G : cosq; æquales, per vigesimam- quintam Tertij, propter æqualitatem quinque angulorum qui in ipsos cadunt: quorum quatuor ad basin

Trianguli ABC : quintus verò ad verticem A . Con- nexis itaque AH , HB , AG , & GC : erit Pentagonum $AHBGG$ Circulo inscri- ptum, æquilaterum, per vigesimamoctauam Tertij, propter æqualitatem Arcuum quos quinque latera subtendunt: Et æquiangulum, per vigesimam sextam eiusdem: propterea quòd quinque Arcus AB , HC , BC , CA , & CH in quos anguli ipsius Pentagone cadunt, sunt æquales: quum ipsorum dimidia sint æqualia. Sicq; constat Propositio.

ALITER. Constructo Triangulo DEF in speciem antecedentis Propositionis, sit Centrum K ipsius Circuli propositi ABC : & super Centro constituatur angulus. BKC , æqualis alterutri angulorum E aut F , Trianguli DEF : connectaturq; BC . Dico BC esse latus Pentagone.



Diuido angulū K æqualiter, ducta Diametro AKL . Tum connecto BA & CA . Et constat, ex decimano- na Tertij, angulum K esse duplum totius anguli A . Igitur totus A angulus æqualis est angulo D , cuius du- plus est ipse K . Et quia Trianguli ABK , duo anguli A & B sunt æquales, per quintam Primi, sunt enim KA & KB à Centro: erit, per trigessimamsecundam eius- dem, angulus BKL duplus ad utrunlibet angulorum

KAB & KBA , exterior interiori: Atque eadem ratione angulus CKL duplus ad utrunlibet duorum KAC & KCA . Itaque quum ambo qui ad K anguli sint æqua- les, erunt duo anguli A & B , Trianguli ABK , duobus A & C , Trianguli ACK , mutuò æquales: ob idq; per vigesimam sextam Primi, duæ bases AB & AC æqua- les. Triangulum igitur ABC Iosceles. Quumq; angulus totus A , æqualis sit angulo D : erunt duo reliqui anguli ABC & ACB , per trigessimamsecundam Primi, duo-
bus

bus reliquis E & F æquales. Quare Triangulum ABC , Triangulo DEF æquiangulum. Ac iam procedet Demonstratio vt modò instituta fuit: intellectis scilicet BG & CH lineis.

Hanc Demonstrationem adscripsimus, vt ostenderemus, inscribendarum in Circulis Figurarum rationem à Centro & Diametro pendere. Vt etiam intelligeremus, duos angulos qui ad K , Trianguli BCK , super Centro incumbentes, esse cognitos. Quod in Heptagono Bouillus non putat. Sed vtinam tam facilis esset Heptagoni inuentio, quàm ipsi sunt noti.

Atque hoc loco iucundum est intueri Triangulorum varietates. Vterque enim angulorum qui ad A , efficit quintam vnius recti: vnde emergit latus Decagoni eidem Circulo inscribendi: vt constat intellectis lineis BL & LC . Arcus enim BC diuiditur in duo æqualia in puncto L , per vigesimam quintam Tertij.

Ex Trianguli itaque æquilateri inscriptione, notum fit Hexagonum: sicq; semper ex simplici numero laterum, cognoscitur duplum: vt ex Quadrato Octogonum: ex Octogono Sedecangulum: ac sic continenter in cæteris. Immò etiam ex hac nostra Demonstratione statim innotescit Pentagoni circumscriptio: vt in sequenti apparebit.

A L I T E R rursus poterimus variare Pentagoni inscriptionem. Sit Circulus quem modò exhibuimus, ABC : maneatq; Triangulum ipsum DEF . Ducto ad Circulum, lineam MAN tangentem ipsum, per decimam sextam Tertij: Et ad punctum A , constituo angulum MAB æqualem alteri angulorum E aut F (quem satis constat esse minorem recto): ducta linea AB quæ secet Peripheriam in puncto B . Rursus ad idem punctum A , constituo angulum NAC æqualem ipsi MAB : ducta linea AC , quæ secet Peripheriam in C . Et connecto BC . Dico BC esse latus Pentagoni. Quod patet diuiso Arcu AB per æqualia in puncto H , ductisq; AH & BH : itemq; diuiso Arcu AC per æqualia in G , ductisq; AG & CG . Sumpto enim Quadrangulo $ABCG$, constat, ex trigesima prima Tertij, angulum ABC æqualem esse angulo NAC alterno: ob id, & angulo E . Similiter sumpto Quadrangulo $ACBH$, erit angulus ACB æqualis angulo MAB alterno: ob id, & angulo F . Quare, per trigesimam secundam Primi, erit, vt prius, Triangulum ABC , ipsi DEF Triangulo æquiangulum: & procedet Demonstratio vt in superioribus.

S E D & constituto ad Peripheriam angulo B , triplo anguli D , ductis lineis AH & BH , erit vtraque ipsarum AH & BH latus Pentagoni: sicut intelligent ij qui ex comparatione angulorum ratiocinari volent. Nam in priori specie, duo anguli B & C Pentagoni, ad Peripheriam, in tres angulos æquales diuiduntur: quorum singuli sunt æquales angulo D . Huiusmodi autem Demonstrationes articulatim non exponimus, quò breuitati consulamus: ac satis nobis est, si eas vtcunque informatas ex aliarum argumento, studiosis examinandas relinquamus. In hac enim Figurarum inscriptione tam latè patet speculandi campus, vt singula assequi meditandò nemo vnquam possit. Quanquam nos initio cum Campano rem non admodum vtilem esse putabamus. Quum verò attentius exploraremus quò spectaret hæc tam ordinata tamq; artificiosa constitutio: sanè comperimus non frustra creditum esse, Figuras quantò propius ad Circuli compositionem accedunt, tantò perfectiores esse. Res igitur hæc tanta est, quanta fortasse in toto opere Geometrico nulla: sicut nos aliquando ostendimus propria commentatione; si nostris inuentis quæ in Geometria quotidie molimur, summus ille Geometer annuerit. Ex hac enim materia, nouum velut opificium & hæctenus non excogitatum exurgit.

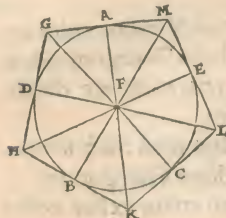
PROBLEMA 12, PROPOSITIO XII.

Circa datum Circulum, Pentagonum æquilaterum & æquiangulum describere.

Sit Circ

Sit Circulus ABC , cuius Centrum F , cui circumscribendum sit Pentagonum æquilaterum & æquiangulum.

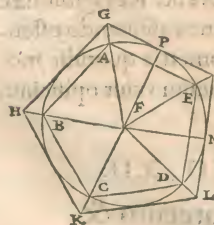
Diuido Peripheriam totam in quinque æqualia, per antecedentem, in punctis A, D, B, C, E . Et à Centro F educo quinque lineas, $FA, FD, FB, FC, \& FE$: ad quas hincinde duco quinque perpendiculares: Quæ concurrent in punctis G, H, K, L, M , tangentq; Circulum, per Constructarium decimæ quintæ Tertij. Tum ad puncta concursus ipsarum, duco à Centro lineas FG, FH, FK, FL, FM . Et quia GA



& GD ab vno puncto cadunt in Circulum: ipsæ erunt æquales, per ea quæ demonstrauimus ad Trigesimam quintam Tertij. Atque eadem ratione erit HD ipsi HB æqualis: & KB ipsi KC : sicq; ordinatim. Et quoniam quinque Arcus $AD, DB, BC, CE, \& EA$ sunt æquales: erunt, per vigesimam sextam Tertij, quinque anguli qui ad Centrum, $AFD, DFB, BFC, CFE, \& EFA$, æquales. Et quia duobus latera $AG \& FA$, Trianguli FGA , sunt æqualia duobus $DG \& FD$, Trianguli FGD , & latus GF commune: erunt, per octauam Primi, duo ipsorum anguli qui ad F , inter se: duoq; anguli qui ad G , inter se quoque æquales. Similiter erunt duo anguli qui ad F , Triangulorum $DFH \& HFB$, inter se: duoq; qui ad H , inter se æquales. Sicq; trium reliquorum Triangulorum $BFC, CFE, \& EFA$, singuli diuidentur per æqualia, lineis $FK, FL, \& FM$: eruntq; decem anguli qui ad Centrum, æquales. Quoniam igitur duo anguli $A \& F$, Trianguli GAF , sunt æquales duobus angulis $A \& F$, Trianguli MAF , latusq; AF commune: erit, per vigesimam sextam Primi, angulus G vnus, æqualis angulo M alterius: latusq; GA , æquale lateri AM . Eadem ratione erit angulus C , Trianguli CFD , æqualis angulo H , Trianguli DFH : latusq; GD æquale lateri DH . Quum itaque GA sit dimidium GM , & GD dimidium GH : sintq; $GA \& GD$ æqualia: erunt, per animi Notionem, $GM \& GH$ eorum dupla, æqualia.

Similiter probabimus $GM, ML, LK, \& KH$ esse æqualia. Quare Pentagonum $G H K L M$, æquilaterum, Sed & æquiangulum. Quum enim duo anguli qui ad G , probati sint æquales: duoq; qui ad M , æquales: & G dimidijs, æqualis M dimidio: erit totus G , toti M æqualis. Atque eadem ratione reliqui anguli ipsius Pentagoni probabuntur æquales, Quod erat faciendum.

ALITER ex Parallelis. In Circulo ABC , cuius Centrum F , inscribo Pentagonum æquilaterum & æquiangulum $ABCDE$, sicut docet antecedens: per cuius quinque angulos duco à Centro ultra Peripheriam, quinque lineas $FG, FH, FK, FL, \& FM$. Et constat quinque angulos qui ad F Centrum, esse æquales: quum latera quinq; intrinsecus Triangulorum sint æqualia, & bases æquales. Constat etiam quinq; angulos Pentagoni, qui ad Peripheriam, esse diuisos in decem angulos æquales, per quartam Primi. Duco itaque inter duas lineas $FG \& FH$, lineam GH , parallelum lateri AB , & tangentem Circulum ABC , per ea quæ docuimus ad decimam sextam Tertij: atque huic similes duco $HK, KL, \& LM$, singulis lateribus $BC, CD, \& DE$ parallelas.



Et quoniam FG cadit in duas parallelas $AB \& GH$, erunt duo anguli $FGH \& FHG$, duobus $FAB \& FBA$ mutuò æquales, per secundam partem vigesimæ nonæ Primi: ob idq; inter se æquales. Et per sextam igitur Primi, duæ lineæ $FG \& FH$ æquales. Eadem ratione erunt duo anguli $FHK \& FKH$, duobus $FGH \& FHG$ mutuò æquales: & FK æqualis FH : quapropter & ipsi FG . Quum itaque anguli qui ad F , sint æquales: erit, per quartam Primi, basis HK basi GH æqualis. Similiter probabuntur tres lineæ $FK, FL, \& FM$, æquales duabus $FG \& FH$: Duæ item bases $KL \& LM$, æquales duabus $GH \&$

GH & HK : Et anguli quos cum ipsis FK , FL , & FM faciunt, æquales inter se. Iam connecto quintam lineam MG : quæ erit æqualis quatuor prioribus, per ipsam quartam Primi: quum duæ lineæ FG & FM probentur æquales: sitq; angulus GF FM æqualis unicuique angulorum qui ad F . Hæc etiam tangit Circulum. Ad punctum epi- contactus ipsius LM cum Circulo, quod sit N , ducio FN . Et cõstat, ex decima-septima Tertij, utrunque angulum qui ad N , esse rectum. Quapropter quum angulus L , Trianguli FLN , sit æqualis angulo M , Trianguli FMN : & angulus N vnus, æqualis angulo N alterius: & FN vtrique communis: erit, per vigesimam sextam Primi, NL æqualis NM : sicq; LM diuisa æqualiter in puncto N . Et quoniam tria latera Trianguli FGP , sunt æqualia tribus lateribus Trianguli FMP : erit angulus P vnus, æqualis angulo P alterius, per octauam Primi: quapropter vterque rectus, per decimam tertiam eiusdem. Quum itaque duo anguli FMP & FPM , Trianguli FMP , sint æquales duobus angulis FMN & FNM , Trianguli FMN : & latus FM vtrique commune: erit FP æqualis FN . Sed FN est à Centro ad Peripheriam. Et erit igitur FP à Centro ad Peripheriam. Quumq; MG sit ad EP perpendicularis: ipsa, per Consectarium decimæ quintæ Tertij, contingit Circulum. Quare $GHLM$ Pentagonum circumscriptum Circulo, æquilaterum: Quod & æquiangulum probatum est, ex æqualitate dimidiorum: sicut facere oportuit.

Atque hæc Demonstratio quanuis amplior videatur, tamen ipso intuitu sese explicat.

PROBLEMA 13, PROPOSITIO XIII.

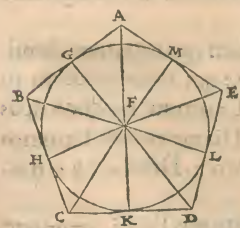
In dato Pentagono æquilatero & æquiangulo Circulum inscribere.

Sit datum Pentagonum $ABCDE$ æquilaterum & æquiangulum, in quo describendus sit Circulus.

Duos angulos ad vnum quempiam laterum ipsius Pentagoni adiacetes, ut A & E , diuido æqualiter, ductis lineis AF & EF : Quæ concurrent intra Pentagonum ad punctum F . A quo ad vnumquodque laterum Pentagoni, ducio quinque perpendiculares FG , FH , FK , FL , & FM . Tum ad duos angulos hinc inde proximos B & D , ducio FB & FD . Et quia duo anguli A & M , Trianguli AFM , sunt æquales duobus angulis A & G , Trianguli AFG : & latus AF commune: erit, per vigesimam sextam Primi, FM æqualis FG . Ac similiter, per eandem, erit FL æqualis FM , sumptis duobus Triangulis EFL & EFM . Rursus quum duo latera AB & AF , Trianguli ABF , sint æqualia duobus AE & AF , Trianguli AFE : & angulus A vnus, æqualis angulo A alterius: erit, per quartam Primi, angulus ABF æqualis angulo AEF . Et quia totus B toti E est æqualis, & E diuisus æqualiter: erit & B diuisus æqualiter. Eadem ratione probabitur totus B æqualiter diuisus: sumptis Triangulis EAF & EDF . Quia ergo duo anguli G & B , Trianguli GFB , sunt æquales duobus angulis H & B , Trianguli HFB , & latus FB commune: erit, per vigesimam sextam Primi, FH æqualis FG . Eadem ratione probabitur FK æqualis FL , sumptis Triangulis LFD & KFD . Quum igitur quinque lineæ FG , FH , FK , FL , & FM sint æquales: erit F Centrum Circuli, per nonam Tertij. Qui secundum

ipsarum quantitatem descriptus, tanget latera Pentagoni, per primam partem decimæ quintæ Tertij, Quod erat faciendum.

INITIO constructionis præmonstrat Campanus, lineas AF & EF , diuidentes duos angulos A & E , concurrere intra Pentagonum. Sed hoc constabat ex antecedentis compositione: in qua FG & FH , ad Centrum F terminatæ, probabantur æquales



les. Nam ex huiusmodi constructionibus Confectaria colligi solent. Quod ex prima Tertij, & decimaquinta eiusdem, moxq; ex decimaquinta huius, alijsq; Propositionibus satis multis videre est. Sicut etiam ex hac sequitur, immò ex antecedente: Lineas perpendiculares à punctis medijs laterum Pentagoni eductas, per Centrum Circuli transire, angulosq; oppositos æqualiter diuidere. Vt hoc loco, AK est linea vna, diuidens angulum A , latusq; CD æqualiter: ac reliquæ in eundem modum. Quod sic ostenditur.

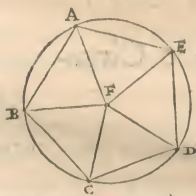
Spatium illud circa Centrum F , æquale est quatuor rectis: qui in decem æquales diuiduntur, decem lineis in F convenientibus. Quinque igitur anguli AFM , MFL , EFL , LFD , & DFK sunt duobus rectis æquales. Quapropter AF & FK , per decimam-quartam Primi, vnā lineam efficiunt. Eadem & de cæteris lineis erit probatio. Atque hoc in omnibus Figuris æquilateris imparium laterum est perpetuum.

PROBLEMA 14, PROPOSITIO XIII.

Circa datum Pentagonum æquilaterum & æquiangulum, Circulum describere.

Sit circa datum Pentagonum æquilaterum & æquiangulum $ABCDE$, describendus Circulus.

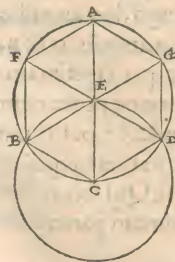
Duos angulos A & E diuido in duo æqualia, ductis lineis AF & EF : quæ concurrent intra Pentagonum ad punctum F , vt antea probauimus. Tum ab ipso puncto F , ad reliquos angulos duco lineas FB , FC , & FD . Et quia duo latera AF & AB , Trianguli ABF , sunt æqualia duobus lateribus AF & AE , Trianguli AEF , & angulus A vnus æqualis angulo A alterius: erit, per quartam Primi, FA æqualis FE : & angulus ABF æqualis angulo AEF . Quumq; totus B , toti E sit æqualis: erit B diuisus in duo dimidia. Atque eadem ratione vterq; angulorum C & D diuisus in duo dimidia: ob id, quinque lineæ FA , FB , FC , FD , & FE æquales. Quare, per nonam Tertij, erit F Centrum Circuli, Pentagono $ABCDE$ circumscribendi, Quod faciendum fuit.



PROBLEMA 15, PROPOSITIO XV.

In dato Circulo, Hexagonum æquilaterum & æquiangulum describere.

Sit datus Circulus $ABCD$, cuius Centrum E , cui inscribendum sit Hexagonum æquilaterum & æquiangulum.



Duco Diametrum AEC : & secundum quantitatem Semidiametri EC , describo Circulum EBD : qui secet priorem in duobus punctis B & D . A quibus, per Centrum E , duco duas BEG & DEF Diametros. Trium verò Diametrorum terminos cōiungo sex lineis AF , FB , BC , CD , DG , & GA . Dico $AFBCDG$, esse Hexagonum quale proponitur.

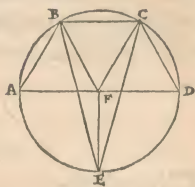
Erit enim ex Themate primæ Propositionis Primi, vtrunque Triangulorum BEC & CED æquilaterum: & per quintam eiusdem, æquiangulum. Duo igitur anguli BEC & CED cum tertio quopiam æquali, efficient, per trigessimamsecundam eiusdem, duos rectos: quum vterque sit tertia pars duorum rectorum. Et quia iidem BEC & CED : cum angulo DEG , efficiunt duos rectos, per decimātertiam eiusdem, erit

erit DEG æqualis vtrique illorum. Sunt itaque sex anguli qui ad E , æquales. Et sex igitur Arcus quos comprehendunt, æquales: per vigesimam quintam Tertij: Quapropter & sex illorum subtensæ æquales, per vigesimam octauam eiusdem. Æquilaterum igitur Hexagonum. Sed & æquiangulum, per vigesimam sextam eiusdem: propterea quod Arcus in quos cadunt, æquales sunt: nempe singuli sexta pars Peripheriæ, Quod fuit constitutum.

ALITER. Sit in Circulo $ABCDE$, cuius Centrum F , describendum Hexagonum æquilaterum & æquiangulum.

A Centro F duco Semidiametrum FA . Tum ex puncto A , per primam huius, accommodo lineam AB æqualem ipsi Semidiametro: Quam dico esse latus Hexagoni æquilateri & æquianguli.

Connecto FB . Et quia AB est æqualis FA : est & æqualis FB . Triangulum igitur AFB æquilaterum, & per quintam Primi, æquiangulum. Constituo postmodum super F Centro, angulum BFC æqualem angulo AFB , vel angulo FBA , quod perinde est, ducta linea FC : & connecto BC . Et quia AFB est tertia pars duorum rectorum, per quintam & trigesimam secundam Primi: erit & BFC tertia pars duorum rectorum. Quapropter duo reliqui ABC & FCB , quum sint æquales, per quintam Primi, erunt duæ tertiæ duorum rectorum, per trigesimam secundam eiusdem.



Vel, per quartam Primi, quum angulus BFC sit æqualis FBA , duoq; latera FB & FC sint æqualia duobus AB & BF : erit basis BC æqualis basi BF : quapropter & ipsi FC . Triangulum igitur FBC æquilaterum & æquiangulum. Demum constituo angulum CFD æqualem vtrique angulorum qui ad F positi sunt, ducta linea FD : & connecto CD . Eritq; iam ex posita ratione, Triangulum FCD æquilaterum & æquiangulum. Quumq; tres anguli qui ad F , duobus rectis sint æquales, est enim unusquisq; tertia pars duorum rectorum: erit, per decimam quartam Primi, AD linea vna: ob idq;, Diameter Circuli. Alter igitur Semicirculus AFD , in tot partes æquales diuidetur, in quot ABC , totq; æquales subtensas comprehendet. Quare AB est latus Hexagoni æquilateri Circulo inscribendi. Quod & æquiangulum erit: nam dimidium totius B , æquale est totius C dimidio, Quod fuit faciendum.

Q V V M igitur duxerimus ab F Centro perpendicularem FE , & connexuerimus BE & CE : effecerimus Triangulum BEC : cuius angulus E qui ad verticem, erit sexta pars duorum rectorum, per decimam nonam Tertij. Nam BFC angulus, ad ipsum duplus vterque verò duorum EBF & ECF angulorum ad basin, erit duplus sesquialter, seu duplus sesquialter, ad ipsum E angulum. Atque hæc erat ars inueniendi lateris Hexagonici. Duæ igitur Demonstrationes modo inductæ, compendiarie fuerunt.

Poterat etiam inscribi Hexagonum ex Trianguli Æquilateri inscriptione, diuiso vnoquoque trium Arcuum per æqualia.

S E D iam hoc Figurarum inscribendarum negotium elucidemus.

Quæcunque imparium sunt laterum Figuræ: ex Circulo inscribuntur adminiculo Triangulorum Iſoscelium, quorum duo anguli qui ad basin, multiplices sint eius anguli qui ad verticem. Triangulum itaque Æquilaterum (quod est primum imparium laterum, atque, ob id, tot habet Priuilegia) seipsum explicat: idq; habet ab Vnitate, per quam designatur. Constituto enim Triangulo Iſosceli ad Peripheriam, cuius duo anguli qui ad basin, æquales sint angulo qui ad verticem (Æquale verò sui ipsius multiplex est, vt Vnitas) ipsa basis erit latus Trianguli Æquilateri Circulo inscribendi. Ac sic Æquilaterum, tanquam Iſosceles consideratur.

Pentagonum autem, quod est secundum imparium, reperitur officio Trianguli Iſoscelis, cuius vterque angulus qui ad basin, duplus sit eius qui ad verticem: sicut demonstratum est in vndecima huius.

k Heptag

Heptagonum verò, per Triangulum, cuius uterque angulus qui ad basin, triplus sit eius qui ad verticem: Ennagonum, quadruplus: Vndecangulum, quintuplus: Tredangulum, sextuplus: ac sic continenter.

PARIVM autem laterum Figuræ æquilateræ Circulo inscribuntur, officio Triangulorum Ifofcelium, in quibus anguli qui ad basin, sint multiplices sesquipedes eius anguli qui ad verticem.

Vt Quadratum (primum parium laterum, atque eam ob causam etiam tot habet priuilegia) inscribitur Circulo: ex Triangulo Ifofceli ad peripheriam collocato, cuius uterque angulus qui ad basin, sit sesquipleus, seu sesquialter, eius anguli qui ad verticem. Sed compendij causa, aliter docuit Euclides in sexta huius. Hexagonum, secundum parium, officio Ifofcelis cuius uterque angulus qui ad basin, sit duplus sesquipleus eius qui ad verticem: Octogonum triplus sesquipleus: Decagonum, quadruplus sesquipleus: sicq; in continuunt, per Figuras parium laterum. Atque ex ijs innumerabiles abundant meditationes.

At verò imparium laterum Figuræ, idcò difficiliore cognitu, quòd pleræq; ipsarum per numeros Primos repræsententur: Quales sunt 3, 5, 7, 13, 17: ac similes. Sed de his aliàs vberius, ut antè polliciti sumus. Hæc tamen in Hexagono docere potius visum est, quòd ipsum sit maximè perspicuum: atque ob eam causam quod per senarium numerum significetur, qui primus est Perfectorum.

Confectarium.

Latus Hexagoni Circulo inscripti, æquale est Circuli Semidiametro.

Hoc verò satis constat ex vtraque Demonstrationum: maximè ex secunda, quæ per Triangula Æquilatera procedit, quorum latera sunt Semidiametri.

Ex Campano. Non proposuit Euclides, Circa datum Circulum, Hexagonum æquilaterum & æquiangulum ut describatur: neque ut intra aut circa Hexagonum, Circulus: quòd satis esse putaret de Pentagono proposuisse: ex cuius comparatione, reliquæ species Æquilateræ Circulis acomodabuntur, atque iisdem Circuli. Illud insuper obseruandum, Omnem Figuram æqualium laterum Circulo inscriptam aut circumscriptam, æqualium quoque esse angulorum. De inscripta constat ex vigesima septima & vigesima sexta Tertij: sumptis binis quibusq; Arcubus contiguus, quos duo latera angulum continentia subtendunt. De circumscripta autem, ductis lineis à Centro Circuli ad omnes angulos ipsius Figuræ & ad puncta contactuum: sicut ex themate decimæ tertie huius ostenditur.

Hic etiam animaduertemus, quod & suprà in quadragesima sexta Primi monuimus, in Figuris parium laterum lineas ab angulis per Centrum ad angulos duci: sed in Figuris imparium laterum, ab angulis per Centrum ad latera.

PROBLEMA 16, PROPOSITIO XVI.

In dato Circulo, Superficiem quindecim laterum æquilateram & æquiangulam inscribere.

Sit in dato Circulo A B C D inscribenda Superficies quindecangula æquilatera & æquiangula.

Intra Circulum, per doctrinam secundæ huius, & primæ eiusdem, applico latus Trianguli Æquilateri: quod sit A C: &, per vndecimam huiusce, latus Pentagoni, quod sit A B, in Arcu A C.

Qualium itaque segmentorum æqualium tota A B C D Peripheria est quindecim, talium Arcus A B C, tertia pars ipsius, erit quinque: & Arcus A B quinta pars eiusdem
crit



erit trium : ob idq̃, residuum BC , duorum æqualium. Secetur, per trigessimam Tertij, Arcus BC bifariam in E puncto. Et erit vterque Arcuum BE & EC , decimaquinta pars totius Peripheriæ. Si igitur coniunxerimus rectas BE & EC : fient duo latera Quindecanguli æquilateri. Et tales tres admittet Arcus AB , sicut astruximus : fientq̃, in Arcu AC , quinque decimæquintæ totius Peripheriæ. Qui quum sit tertia pars ipsius, reliquæ duæ tertiæ CD & DA , in tot tantasq̃, sectiones diuidentur : quarum subtensæ erunt latera Quindecanguli æqui-

lateri, Quod erat faciendum.

SIMILITER autem vt in Pentagono, si per quindecim puncta diuisionum æqualium Circuli, duxerimus lineas tangentes : circa ipsum Circulum describetur Quindecangulum æquilaterum & æquiangulum : Atque insuper iisdem, quibus illuc, obseruationibus, dato Quindecangulo Circulum inscribemus & circumscribemus.

Libri Quarti Geometricorum Elementorum,

F I N I S.





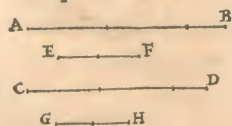
IACOBI PELETARII
CENOMANI IN EVCLIDIS
ELEMENTA GEOMETRICA
DEMONSTRATIONVM
LIBER QVINTVS.

DEFINITIONES.



Ars, est Magnitudo Magnitudinis minor maioris, quum minor maiorem metitur.

In explicandis huius Quinti Definitionibus, Numeros nobis accommodabimus. Id enim disciplinae gratia in Principiorum ostensione licet: In demonstrationibus autem Propositionum, Geometrica dignitas seruanda est. Alia quippe ratio & natura Continuatorum, atque alia Discretorum. In quibusdam tamen adeo religiosi non erimus: nempe dum Quantitatis vocabulum pro Magnitudine usurpabimus. Quauis enim hoc peculiarius, illud generalius sit: utrumque tamen Geometria paruo discrimine sibi vendicat. Partem itaque, hoc loco plerique esse putarunt, quae totum aequaliter diuidit: scilicet quae aliquoties sumpta, Totum integre constituit. Ac sic binaria denominatio neque Ternaria, neque Quinaria, neque ullius imparis integri pars erit: sed tantum Quaternaria, Senaria, & parium. Sed meo iudicio, non recte accipiunt. Neque enim Proportiones aliter quam generatim considerandae sunt. Atque ut in Discretis, omnis Numerus est pars aut partes maioris: sic & in Proportionum materia, omnis Magnitudo pars est aut partes maioris, quum Proportio rationalis est: hoc est, per numeros explicabilis. At dices, Euclides hoc loco Partem non sic definitam esse vult, ut ad Totum referatur, sed ad Multiplex. Verum id quidem est: alioqui nihil opus fuisset definitione Partis, quae satis ex superioribus nota erat. Sed Multiplex aliter sumendum quam ipsi putent. Quinarius enim Binarius multiplex est, quum sit ipsius duplex sesquipleus, seu maius, duplus sesquialter: Immo & Ternarius ipsius Binarius, sicut & Vnitas sui ipsius, multiplex est. Sed quum difficile sit praesertim inter docendum, superpartientia & superparticularia in partes suas distinguere, ob inaequalitatem: in Demonstrationibus partes aequales assumuntur. In ijs vero quae non de industria ponuntur Magnitudinibus, proportionibus sunt fortuitae. Quapropter si linea AB fuerit linea EF, verbi gratia, dupla sesquialtera: lineaque CD fuerit linea GH itidem dupla sesquialtera: erit utique AB ipsius EF, ut CD ipsius GH aequemultiplex. Pars igitur hoc loco accipienda, ac si dicas submultiplex: & eatenus consideranda, quatenus ad integrum habet rationem aliquam quae per numeros exponi possit: Quod vox *metitur* satis indicat. Ex hoc consequitur Multiplicis Definitio.



- 2 Multiplex, est Magnitudo maior minoris, quam metitur minor.

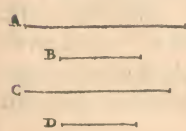
Hec

Hæc autem ex superiori satis manifesta est. Sunt enim hæ voces mutæ, seu, vt vocant, ad aliquid. Senarius igitur, quem Binarius metitur: sed & Quinarius, eiusdem Binarij multiplex est.

3 Ratio est duarum Magnitudinum eiusdem generis quædam habitudo inter se.

Ratio seu Proportio inter eas aduenit Magnitudines, quæ sunt eiusdem generis. Vt enim neque Numerum ad Sonum, neque Tempus ad Locum rectè quisquam comparauerit: sic neque Lineam ad Superficiem, neque Superficiem ad Solidum. Linearum verò ad Lineas, Superficierum ad Superficies, & Solidorum ad Solida conueniens fiet collatio. Quædam autem dicitur, non certa. Omnis enim Linea ad alteram habet rationem aliquam, non tamen certam. Atque eiusmodi Quantitates dicuntur irrationales, incommensurabiles, seu incommunicantes: qualis est lateris Quadrati ad Diametrum. Certæ verò rationes seu nominatæ, sunt quæ per Numeros indicantur. Quarum denominationes ex Arithmeticis petuntur.

4 Proportionalitas, est Proportionum similitudo.



Vt si dicatur ea esse proportio A ad B, quæ est C ad D: eiusmodi similitudo seu comparatio, Proportionalitas vocatur. Malè igitur verterunt quidam, Proportionem loco Proportionalitatis. *Ἀναλογία* enim aliàs Proportionem significat Quintiliano: hîc verò Proportionum similitudinem, quam Proportionalitatem diximus, vtcunque vox parum Latina sit: quales & huc satis multæ incident.

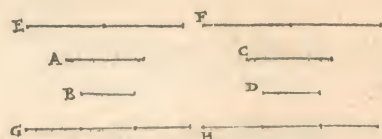
5 Rationem habere inter se Magnitudines dicuntur, quæ multiplicatæ, possunt altera alteram excedere.

Non poterat alio ingenio vim substantiamq; Rationis inter Magnitudines exponere, quàm Multiplicationis vocabulo: vt etiam incommensurabiles includeret. Excessus enim index comparisonis Quantitatum. Quum ergo latus Quadrati multiplicatum possit Diametrum excedere: Diameter item multiplicata, Peripheriam: habebit rationem latus ad Diametrum: atque inde Diameter ad Peripheriam, licet incognitam. Atque ex hoc loco satis colligitur, Angulum, quem contactus vocauit Euclides in xv Tertij, quantitatem non esse: quum multiplicatus nullam magnitudinem possit excedere: immò, quum multiplicari non possit: vt illic demonstrauimus. Multiplicationem autem hoc loco accipimus, pro eo augmento quod fit in partes, quas vocant homogeneas. Linea enim multiplicata, id est, ducta partibus sui similibus, lineam excedet: sed non superficiem: sicq; ad superficiem non habebit rationem.

6 In eadem ratione Magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam vt tertia ad quartam: quum primæ & tertiæ æquemultiplicia, secundæ item & quartæ æquemultiplicia, fuerint primum secundo & tertium quarto secundum quauismultiplicationem, aut simul æqualia, aut simul maiora, aut simul minora.

Quia in Geometricis plerunque Rationes occurrunt incognitæ: seu innominatæ: k ; tx : ad

ta: ad earum probationem, Æquemultiplicium officium nobis accersimus: quæ quidem variè comparamus, vt scopum attingamus. Hoc igitur innuit Definitio, Si fue-



rint quatuor Magnitudines, videlicet A prima, B secunda, C tertia, & D quarta: sumantur autem ipsarum A & C æquemultiplicia E & F, itemq; ipsarum B & D alia utcumque æquemultiplicia G & H: itaque res cadat, si E & G sese invicem æquent, aut sit alterum altero maius: etiam F & H sese invicem æquare, aut esse alterum altero maius: Erit tum A ad B, sicut C ad D. Scilicet, si E & F per duplum auctis, sed G & H, verbī causa, per triplum: sit E æquale G, & simul sit F æquale H: aut si E sit maius G, sit simul F maius H: aut si minus, minus: idq; semper fiat, seu per triplum, seu per quadruplum, seu per quancunque denominationem sumantur æquemultiplicia: erit omninò A ad B sicut C ad D. Erat igitur huius Definitionis sententia, Quum primæ & tertiæ æquemultiplicia, aliaq; secundæ & quartæ utcumq; æquemultiplicia sic fuerint, vt si multiplex primæ æquale fuerit multiplici secundæ, sit & multiplex tertiæ æquale multiplici ipsius quartæ: & si maius, maius: & si minus, minus: Erit prima ad secundam, vt tertia ad quartam. Sed in hæc verba non pronuntiavit Euclides, ne Theorematis speciem daret, non Principij. Multò minus sic pronuntiavit, In eadem ratione Magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam vt tertia ad quartam: quum primæ & tertiæ æquemultiplicia, secundæ item & quartæ æquemultiplicia, fuerint primum ad secundum, vt tertium ad quartum. Ignotum enim per æquè ignotum definisset.

At dices, Tam difficilis est, immò fortasè difficilior huiusmodi æqualitas aut excessus Æquemultiplicium, quàm simplicium inter se ratio. Non est sanè. Maiorum enim Quantitatum facilior est comparatio, ob partium numerum. Multiplicia enim pro arbitrio collocare & accommodare possumus, & ex ipsorum artificiosa cōstructione, simplicium rationem colligere. Præterea, quum duas Magnitudines duabus conféro: vnum tamen vni conféro, nempe rationem rationi: sicq; intra binarium confisto. Quum verò multiplicia multiplicibus: quaternarium considerem oportet, nempe multiplex primæ, secundæ, tertiæ, & quartæ cum simplicibus ipsis. Atqui latius patet quaternarius binario. Quum igitur tractabilia sint æquemultiplicia, iure obijci non poterit, quòd ignotum per æquè ignotum ostendatur. Huc accedit quòd quum mox egeremus Incontinua Proportionalitate, eius omninò fuit facienda mentio sub Definitionis titulo: ne in Demonstrationibus futuris ingenia auscultantium interciperentur, re inaudita. Nemo itaque offendatur quòd Principium difficile sit. Definitiones enim subtiles esse nihil vetat, præsertim quum res complicata definitur, qualis est ratio Magnitudinum. Nam & in traditionibus Dialecticis sæpe euenit, vt Definitum celerius promptiusq; capiamus, quàm Definitionem ipsam. Nemo enim est qui prius non capiat Hominem, quàm animal rationale. Quem verò substantiā Hominis cognoscere cupimus, tum nobis plenius satisfacit Definitio.

Possunt autem eiusdem esse generis Magnitudines: & possunt non esse. Dicemus enim, sicut Linea ad Lineam, ita Lineam ad alteram: sed & sicut Linea ad Lineam, ita Superficiem ad Superficiem.

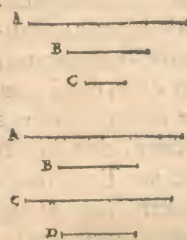
Neque omittendum duxi, quòd hoc loco Euclides generatim locutus est, sicut prima ad secundam ita tertia ad quartam: vt vtranque intelligeremus & Continuum & Incontinuum Proportionalitatem. Vtrobique enim quatuor sunt Magnitudines: in hac expressæ, in illa tacite. Nam quum dicimus continuè, sicut A ad B ita B ad C quatuor sunt Magnitudines. Nam ipsa B magnitudo, duarum vicem supplet, dum consequitur & antecedit. Itaque non ex Euclidis sententia fecerunt, qui Continuum Proportionalitatem separatim definierunt: vt hic Campanus quinta sua Definitione. Nam quæ vtriusque sunt propria, hæc loco Euclides dissimulavit, communiter ambas

ambas vna hac sexta Definitione complexus.

Quod verò dicitur, primum secundo & tertium quarto : hunc sensum habet, vt inæqualitatis & excessus ratione, conferatur multiplex primæ, multiplici secundæ : & multiplex tertiæ, multiplici quartæ : licet initio multiplex primæ cum multiplici tertiæ : & multiplex secundæ cum multiplici quartæ coniungendum fuerit.

Hanc Definitionem quàm potuimus clarissimè explicauimus : vt controuersiam abigeremus ex huius Quinti Definitionibus ortam. Nam qui in his Campanum reprehendunt, meo iudicio non rectè reprehendunt. Neque enim Euclidem non intellexit : Sed dum voces easdem identidem inculcat (quæ res ferè vna Proportionum materiam obscuram facit) : ipse in orationis implicationem se conijcit : ob Dialecticæ, vt apparet, ignorantiam. Vnicuique tamen quod liberè sentiat de Campano relinquimus, dummodò nos Proportiones Geometricè tractemus.

7 Magnitudines verò quæ in eadem sunt ratione, Proportionales dicuntur.



Quantitates inter quas est rationum similitudo, quæ antea Proportionalitas vocata est, Proportionales dicuntur. Vt si fuerit A ad B sicut B ad C : erunt A, B, & C proportionales. Atque hæc Proportionalitas Continua : nam inter singulas continuatur ratio, propterea quòd media consequitur ad primam, & antecedit ad tertiam. Si verò fuerit A ad B sicut C ad D : erunt & hæc quatuor proportionales, sed incontinuè : quia binæ distinguuntur, ac velut interrumpuntur. Singulæ enim vnicam habent denominationem aut Antecedentis aut Consequētis.

8 Quum multiplex primæ excefferit multiplex secundæ, multiplex verò tertiæ non excefferit multiplex quartæ : maiorem rationem habere dicetur prima ad secundam, quàm tertia ad quartam.

Hæc manifesta est ex Sexta. Scilicet, Quatuor Magnitudinum nunquam maior est proportio primæ ad secundam quàm tertiæ ad quartam, quin contingat aliqua æquemultiplicia primæ & tertiæ collata ad aliqua secundæ & quartæ æquemultiplicia, sic se habere, vt multiplex primæ excedat multiplex secundæ, neq; multiplex tertiæ excedat multiplex quartæ. Neque hoc contingit vnquam quin maior sit proportio primæ ad secundam, quàm tertiæ ad quartam. Et hæc dicitur maior Improportionalitas. Quum verò multiplex primæ minus fuerit, quàm multiplex secundæ : neque multiplex tertiæ minus fuerit, quàm multiplex quartæ : erit minor ratio primæ ad secundam, quàm tertiæ ad quartam. Atq; hæc minor Improportionalitas dicitur.

9 Proportionalitas, minimùm, in tribus est terminis.

Quia duarum Magnitudinum collatio tantùm ratio est, non rationum similitudo : fit vt duæ, Proportionalitatem non constituent. Tres itaque, minimùm, debent esse : Qui numerus Continuum semper Proportionalitatem constituit. Possunt autem & in Continua quatuor esse quantitates : hoc est, tam impari quàm pari numero. At in Incontinua, neque pauciores quàm quatuor, neque impari sunt numero. Quod qui attentius considerauerit, comperiet Euclidem hac ratione inductum, Proportionalitatem Continuum & Incontinuum non separasse.

Meminisse tamen oportet, Parem numerum præesse omni Proportionalitati. Nam quum dico vt A ad B ita B ad C : duarum rationum fit comparatio, vt antea diximus.

k 4 mus.

mus. Itaque Binarij vim sic innuit Euclides,

- 10 Quum tres Magnitudines fuerint proportionales: dicetur proportio primæ ad tertiam sicut proportio primæ ad secundam duplicata.

Definit Proportionalitatem trium Quantitatum. Cuius Definitionis explicatio hæc est. In proportionalitate trium Quantitatum, latet Quadrati natura. Scilicet tantum producant duo extremi termini inter se, quantum medius in se. Ob id, proportio extremorum inter se, est duplum proportionis primi ad secundum. Quod nisi per Numeros satis definitè exponi nequit. Sint 2 ad 4, vt 4 ad 8. Hæc est proportionalitas Continua in dupla ratione. Ducto 2 in 8, fiunt 16 : & tantundem producant 4 in se. Itaque, ex definitione, erit proportio 2 ad 8, denominata à Quadrato Binarij, proportionem primi ad secundum denominantis; nempe quadrupla. In tripla ratione, sint 2 ad 6 vt 6 ad 18. Denominationem proportionis primi ad secundum, nempe 3, ducto in se: fiunt nouem, denominator proportionis 2 ad 18. Atq; hæc est Definitionis sententia: ex qua binarij, ternarij, & quaternarij elicitur mira colligatio. Nam in tribus Quantitatibus quatuor insunt: atque huius affinitatis, binarius est index. Huius enim numeri singularis proprietas est, quòd tantum efficiat duplicatus, quantum in se ductus. Ea re Euclides duplicatam proportionem dixit, quasi quadratam: propterea quòd binarius Quadrati est index: vt cæteræ denominationes naturam primæ sequerentur: scilicet tripla proportio duplicata, eadem esset quæ in se ducta. Quadratum itaque per Binarium significatur, sicut Cubus per Ternarium, Quadratum quadrati, seu, vt vulgò dicunt, Censuscensus, per Quaternarium: & Super-solidum, Relatum primum dicunt, per Quinarium: sicq; infinite: Quod nos satis luculenter exposuimus in priore libro nostræ Algebræ. Quum igitur Quantitatem quantitati comparamus, vnitas repræsentatur in Numeris: in Continuis, linea. Trium verò Quantitatum collatio in Numeris, Quadratum: in Continuis, Superficiem: quatuor deniq; proportio in Numeris, Cubum: in Continuis, Solidum. Hæc autem speculatio in immensum patet. Hinc pendet Definitio sequens.

- 11 Quum quatuor Magnitudines continuè proportionales fuerint: dicetur proportio primæ ad quartam sicut primæ ad secundam triplicata: ac semper ordine vna plus, donec sit absoluta proportionalitas.

Quatuor Quantitatum continua proportionalitas, Cubi includit naturam: sicut trium, Quadrati, vt modò diximus. Cubi autem index est Ternarius. Proportio itaq; primæ ad quartam, est proportio primæ ad secundam triplicata: nempe Denominatore in se cubicè ducto. Vt in Numeris, sint 2 ad 4 vt 4 ad 8 & 8 ad 16: Denominator Proportionis, est Binarius. Ducto itaque Binarium in se cubicè, fiunt 8: & tanta est proportio primi ad quartum: scilicet, 2 ad 16, octupla. In quinque autem Positis, erit proportio Primi ad quintum quadrupla quàm Primi ad secundum: In sex, quintupla: sicq; continenter, donec ad vltimum par Magnitudinum perueniamus. Atque hæc est Definitionis sententia. Sed quia natura supra Corpus nihil habet quod sensui exponat, in Geometria non considerantur proportionalia vltra quatuor Posita. In Numeris autem, qui sunt velut interpretes quidam rerum continuarum, vt omnia quæ formam habent, infinita esse ostenderentur, apertè in immensum exurgunt progressionem Proportionalitatum, omniumq; specierum quæ normam recipiunt: Quasi sensus finitus, Intellectus verò interminatus esse comprobetur. Huc autem Numeros afferre fuit necessarium. Dupla enim & tripla ratio, Numerationem præ se fert: neque aliter quàm per Numeros expediri potest.

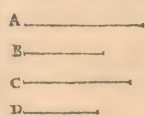
12 Simi

12 Similis rationis Magnitudines dicuntur, Antecedentia antecedentibus & Consequentia consequentibus.

Similitudinem Rationum antea proposuit: hoc est, Proportionalitatem: hic similis rationis Magnitudines suis appellationibus nuncupat. ac si diceret, Magnitudines Proportionales significantur, quatenus antecedunt & consequuntur. Scilicet, sumuntur æquemultiplicia Antecedentium, & æquemultiplicia Consequentium: ut ex ijs proportionalitatem Magnitudinum colligamus. Hanc itaque apposuit Euclides, ut vocabula, quæ dicunt, artis exprimeret. Antecedentium autem & Consequentium variae sunt comparationes: quæ Definitionibus sequentibus explicantur.

13 Permutata Ratio, est acceptio Antecedentis ad antecedens, ut Consequentis ad consequens.

Prima comparatio Magnitudinum, quæ, pronuntiatione naturali, est vnus Antecedentis ad suum Consequens, sicut alterius Antecedentis ad suum Consequens, dux est atque origo cæterarum comparationum: ac primum Permutatæ: in qua mutatur secundum Antecedens in prius Consequens, & prius Consequens in secundum Antecedens. Ut si fuerit A ad B sicut C ad D: & concludatur, A ad C sicut B ad D: hæc Permutata dicitur Ratio.

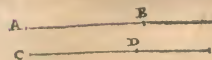


14 Conuersa Ratio, est acceptio Consequentis tanquam antecedentis, ad Antecedens tanquam consequens.



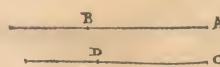
In hac conuertuntur duo Consequentia in duo Antecedentia, & contrà. Ut si fuerit A ad B sicut C ad D: & concludatur conuerso modo, B ad A sicut D ad C.

15 Coniuncta seu Composita Ratio, est acceptio Antecedentis cum consequente instar vnus, ad ipsum Consequens.



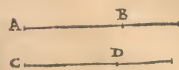
Ut si fuerit A ad B sicut C ad D: & concludatur, totum A B ad B sicut totum C D ad D: dicitur Coniuncta seu Composita Ratio.

16 Disiuncta seu Diuisa Ratio, est quum augmenta Antecedentium supra Consequentia, ad ipsa Consequentia comparantur.



Ut si fuerit totum A B ad B sicut totum C D ad D: & concludatur, A ad B sicut C ad D. Et est conuersus modus Coniunctæ.

17 Euerfa Ratio, est quum Antecedentia comparantur ad excessus quos habent supra Consequentia.

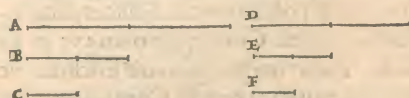


Euerfio Rationum, fit quum Antecedens comparatur cum ea quam habet ad Consequens differentia. Ut si fuerit A B ad B sicut C D ad D: & concludatur, sicut A B ad A, ita C D ad C.

18 Aequa Ratio dicitur, quum plures Magnitudines hinc inde æquali numero sumptæ, & binæ comparatæ

ratae fuerint : tum æquali mediorum numero subla-
to, fit extremorum vtrunque comparatio.

Vt si sumantur Magnitudines A, B, & C : aliæq; totidem D, E, & F : siue sint eius-
dem generis cum primis, siue diuersi : fuerintq; secundæ inter se in eadem ratione
qua primæ : siue eodem ordine, vt si dica-
tur A ad B sicut D ad E, & B ad C sicut E
ad F : siue ordine conuerso, vt si dicatur A
ad B sicut E ad F, & B ad C sicut D ad
E : atque omissis medijs vtriusq; B & E, concludatur A ad C sicut D ad F : Hæc ar-
gumentandi ratio dicitur, ab *Æqua Proportionalitate*.



THEOREMA PRIMVM, PROPOSITIO PRIMA.



SI quælibet Magnitudines totidem Magnitudinum singillatim æquemultiplices fuerint: quàm multiplices sunt singulæ singularum, tam multiplices erunt omnes omnium.

Sint Magnitudines AB & CD , totidem Magnitudinum E & F æquemultiplices: scilicet AB ipsius E , & CD ipsius F . Dico, quàm multiplex est AB ipsius E , & CD ipsius F : tam multiplices esse ambas AB , CD , ambarum E , F .

Quoniam enim æquemultiplex est AB ipsius E , ut CB ipsius F : quot in AB sunt Magnitudines æquales ipsi E , totidem erunt & in CD ipsi F æquales. In AB igitur sint Magnitudines AG , GH , & HB , æquales ipsi E : & in CD sint totidem numero Magnitudines, CK , CL , & LD , æquales ipsi F . Quum itaque multitudo Magnitudinum in AB & in CD sit eadem: sitq; AG ipsi E æqualis, & CK ipsi F : erunt, per

communem Notionem, duæ AG & CK simul sumptæ, duabus E & F simul sumptis æquales. Quumq; GH sit eidem E æqualis: & KL eidem F : erunt quoque GH & KL simul sumptæ, ipsis E & F simul sumptis æquales. Atque eadem ratione HB & LD simul sumptæ, ipsis E & F simul sumptis æquales. Quot igitur in AB sunt Magnitudines æquales ipsi E , quotq; in CD ipsi F : tot sunt in AB & CD simul sumptis, ipsis E & F simul sumptis æquales. Quàm multiplex igitur est AB ipsius E , & CD ipsius F : tam multiplices sunt AB , CD , ipsarum E , F , Quod erat ostendendum.

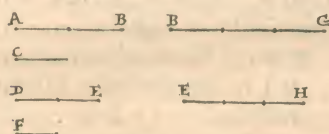
QUVM autem huius primæ Propositionis vim rationemq; perpenderimus, totam in communi iudicio sitam esse intelligemus. Nam quum dicitur, Si æqualibus æqualia addantur, coniuncta æqualia fieri: nihil aliud quàm æqualitas proportionum significatur. Scilicet, si fuerit M æqualis N : & O æqualis P : quatuor habeo Quantitates proportionales. Est enim sicut M ad N , ita O ad P . Si igitur addamus O ipsi M , & P ipsi N : fiet totum MO , æquale toti NP . Ita, quum dico AB triplum esse ipsius E , & CD ipsius F : hoc tacite dico, si AB addatur ad CD , & E addatur ad F : totum AB , CD , esse triplum totius E , F . Sic æqualitas omnes Proportionum species dirigit & gubernat. Ac quemadmodum æqualitas æqualitati addita, æqualitatem conseruat: ita multiplicitas, ut sic dicam, multiplicitati addita, proportionalitatem retinet similem. Sed in quatuor Magnitudinibus aut pluribus æqualibus, nihil refert quæ cui præponatur: Mutato enim ordine, non mutatur denominatio. Quum verò occurrit inæqualitas, distinctiùs animaduertendum est. Maiori enim arte opus est, in ijs, quæ non ordine collocata, confusionem parere solent. Tota igitur Proportionum materia ferè in communi intelligentia consistit. Nam quòd tam difficilis habita sit, ex præsumpta quadam opinione factum est. Proportionum enim tractatio obscura non est: sed eam ad vsum traducere, id demùm operosum est. Aliud enim est artem tenere, & aliud ad rem suam cõuertere. Sicut in rebus gerendis, quid optimum sit multi in otio scienter disputant. At quum in rem præsentem ventum est: quod ex vñ est, vix vnus aut alter exequi meminit. Multas itaque Propositiones in hunc Quintum Librum Euclides contulit, quæ pro Principijs habendæ fuerant. Sed id exquisitè fecit, ut significaret, Propositionum quidam cognitionem in medio esse positam, sed earum vsum difficilem. Hunc igitur Librum

brum diligenter amplectantur qui Geometriam seriò facere volent. Geometria enim quantacunque est, tota in Proportionibus est: neque aliud quicquam spectat, quàm vt Lineas Lineis, Superficies Superficiebus, & Corpora Corporibus componat & comparet. Atque hæc in hac prima Propositione præfari, non abs re nobis visum est.

THEOREMA 2, PROPOSITIO II.

Si prima secundæ æquè fuerit multiplex vt tertia quartæ, fuerit autem & quinta secundæ æquemultiplex vt sexta quartæ: prima quoq; & quinta, secundæ æquemultiplex erit vt tertia & sexta quartæ.

In hac de sex Magnitudinibus agitur. Sit itaque AB prima, C secunda, DE tertia, F quarta; BG quinta, & EH sexta: sitq; prima AB, secundæ C, vt tertia DE, quartæ F æquemultiplex: Et quinta rursus BG, eiusdem C secundæ: vt sexta EH, eiusdem F quartæ æquemultiplex. Dico compositam ex prima & quinta, scilicet AG, ipsius secundæ C æquemultiplicem, vt compositam ex tertia & sexta, scilicet DH, ipsius quartæ F.

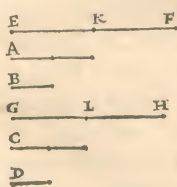


Quoniam enim AB ipsius C æquè est multiplex, vt DE ipsius F: quot in AB sunt Magnitudines ipsi C æquales, tot & in DE ipsi F. Rursus quoniam BG æquè est multiplex eiusdem C, & EH eiusdem F: quot in BG sunt Magnitudines ipsi C æquales, tot & in EH eidem F. Quot igitur sunt Magnitudines in tota AG ipsi C æquales, tot sunt & in tota DH ipsi F æquales. Quamultiplex igitur est composita AG, ipsius C secundæ, tam multiplex est, per antecedentem, composita DH, ipsius F quartæ, Quod fuit demonstrandum.

THEOREMA 3, PROPOSITIO III.

Si primum secundi æquè fuerit multiplex vt tertiũ quarti, sumantur autem æquemultiplicia primi & tertii: erunt quoque multiplex primi, ad secundum, & multiplex tertii, ad quartum æquemultiplicia.

Huc etiam sex interueniunt posita. Sit enim primum A, secundi B, vt tertium C, quarti D æquemultiplex: sumanturq; ipsorum A & C, æquemultiplicia EF & GH. Dico EF ipsius B, vt GH ipsius D æquemultiplex.



Quoniam enim æquemultiplex est EF ipsius A, vt GH ipsius C: quot in EF sunt Magnitudines æquales ipsi A, tot in GH erunt Magnitudines æquales ipsi C. Ponantur itaque in EF Magnitudines EK & KF, æquales ipsi A: & in GH totidem Magnitudines GL & LH, æquales ipsi C. Et quoniam æquemultiplex est A ipsius B, vt C ipsius D: erit quoque EK ipsius B æquemultiplex, vt GL ipsius D. Ac per hoc, æquemultiplex est KL eiusdem B, & LH eiusdem D. Quoniam igitur, vt ponit secunda huius, primum EK, secundi B æquè est multiplex vt tertium GL, ipsius D quarti: est autem & quintum KF, ipsius B secundi æquemultiplex, vt sextum LH ipsius D quarti: Et compositum igitur primum & quartum EF, ipsius B secundi æquè erit multiplex, per eandem, vt tertium & sextum GH, ipsius D quarti, Quod erat demonstrandum.

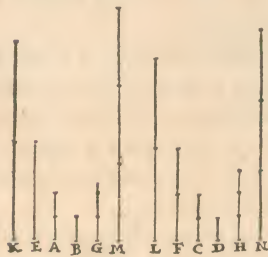
THEOREMA 4, PROPOSITIO IIII.

Si primum ad secundũ eandem habuerit rationem quam

tertium

tertium ad quartum, primi autem & tertii Aequemultiplicia sumantur, itemq; secundi & quarti: ipsa quoque Aequemultiplicia iuxta quavis multiplicationem, eandem inter se rationem habebunt.

Sit eadem ratio A primi ad B secundum & C tertij ad D quartum: sintq; E ad A & F ad C: itemq; G ad B & H ad D æquemultiplicia. Dico esse E ad G sicut F ad H.



Sumantur K ad E & L ad F: itemq; M ad G & M ad H, æquemultiplicia. Et quia E & F sunt ipsorum A & C æquemultiplicia: itemq; K & L ipsorum E & F æquemultiplicia: erunt, per antecedentem, K & L ipsorum A & C æquemultiplicia: ac per eandem, M & N ipsorum B & D æquemultiplicia. Quare, per cōuersionem sextæ Definitionis, K ad M & L ad N similiter se habebunt in addendo, minuendo, & æquando. Quia ergo K & L, ipsorum E & F sunt æquemultiplicia: itemq; M & N ipsorum G & H: erit, per eandem directam, E ad G

sicut F ad H, Quod erat demonstrandum.

LEMMA, seu sumptio. Quoniam igitur constitit si K excedit M, etiam L excedere N: & si æquale, æquale: & si minus, minus: atque ob id, si M excedit K, etiam N excedere L: & si æquale, æquale: & si minus, minus: Erit ex hoc, G ad E & H ad F eadem ratio. Hinc consequitur,

Si quatuor Magnitudines proportionales fuerint, conuerso quoque modo proportionales erunt.

Hoc est, si fuerit sicut A ad B, ita C ad D: erit & sicut B ad A, ita D ad C. Hæc igitur Conuersam rationem probat, quam in decimaquarta Definitione posuerat Euclides.

THEOREMA 5, PROPOSITIO V.

Si Magnitudo Magnitudinis æquæ fuerit multiplex vt ablata ablata: erit & reliqua reliquæ tam multiplex, quàm tota totius.

Sit tota AB totius CD æquemultiplex, vt ablata AE ablata CF. Dico reliquam EB reliquæ DF tam multiplicem, quàm est tota AB totius CD.

Quàm multiplex est AE ipsius CF, tam multiplex fiat EB ipsius CG. Eritq;, per primam huius, quàm multiplex AE ipsius CF, tam multiplex AB ipsius GF. At quàm multiplex est AE ipsius CF, tam multiplex est AB ipsius CD, per hypothesin. Et AB igitur vtriusque GF & CD est æquemultiplex. Æqualis est itaq;, per communem Notionem, GF ipsi CD: quapropter ablata comuni CF: erit reliqua GC, reliquæ FD æqualis. Sed EB æquemultiplex posita est ipsius GC vt AE ipsius CF. Igitur tam multiplex est EB ipsius FD, quàm multiplex est AE ipsius CF. Atqui per hypothesin, AE tam multiplex est ipsius CF, quàm tota AB totius CD. Et EB igitur ipsius FD tam multiplex, quàm tota AB totius CD, Quod erat demonstrandum.

HÆC Demonstratio, vt vulgata, ita certa est. Sed tamen quia id exigit quod nondum docuit Euclides: scilicet vt tam multiplex fiat EB ipsius CG, quàm multiplex est AE ipsius CF: scrupulo non vacat, apud eos præsertim qui res perspicaciùs examinant. Nam si linea AE esset, verbi gratia, triplex ipsius CF: qua ratione fiet EB

triplex

triplex ipsius $c g$, quum id non antè doceat Euclides quàm in duodecima Sexti: Duriusculū enim est vt id cogamur facere aut concedere, quod posterius erit ediscendū.

Huic igitur obiectioni sic occurremus, vt dicamus hanc diuisionem in hunc locum tantum recipi doctrinæ gratia: scilicet vt procedat Demonstratio, non quò sit ad vsum præsentem exquisitè necessària. Ponimus enim Lineam Lineæ æqualem: licet huiusmodi æquationem nondum didicerimus. Sunt enim hypotheses liberæ: vt disciplinarum fundamenta iaciantur.

Sed tamen hunc scrupulum vitabimus hac ratione. Sit Magnitudo AB Magni-

tudinis CD æquemultiplex, vt ablata AE ablata CF . Dico reliquam EB reliquæ DF æquemultiplicem, vt totam AB totius CD .

Quàm multiplex est AE ipsius CF , tam multiplex ponatur AG ipsius FD . Eritq; , per primam huius, quàm multiplex AE ipsius CF , tam multiplex EG ipsius CD . Sed sic fuit multiplex AB eiusdem CD . Sunt igitur EG & AB æquales. Communis auferatur AE : erit AG ipsi EB æqualis. Et quia sicut AE ad CF (ob idq; , sicut AB ad CD) ita AG ad FD : erit & sicut AB ad CD , ita EB ad CF , Quod erat demonstrandum.

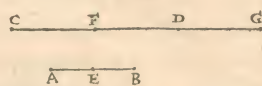
$ALIVD$ igitur est, lineam terminatam & coactam (qualis hoc loco est EB) in partes necessàrias secare: & aliud, lineæ terminatæ, qualis est FD , partes æquales creare, vt in AG . Demonstrationem tamen aliorum nolui omittere: quòd subtilis sit, & ad similes reperiendas ingenium acuat.

Probabimus & ab impossibili. Sit tota AB totius CD tam multiplex, quàm ablata AE ablata CF . Dico reliquam EB reliquæ DF tam multiplicem, quàm tota est AB totius CD .

Si enim non tam sit multiplex, erunt in EB aut plures aut pauciores Magnitudines ipsi FD æquales, quàm in AE ipsi CF . Sint ergo, si possint, plures: Et ponatur EG tam multiplex ipsius FD , quàm AE ipsius CF . Eritq; , per primam huius, tam multiplex AG ipsius CD , quàm AE ipsius CF . Sed AB posita est tam multiplex ipsius CD , quàm eadem AE eiusdem CF . Erit igitur, per communem Notionem, AG ipsi AB æqualis, pars toti, Quod est absurdum. Simili argumentatione probabimus pauciores non esse Magnitudines in EB æquales ipsi FD , quàm in AE , ipsi CF . Sunt igitur totidem multitudines. Quare & totidem quot in tota AB totius CD , Quod fuit demonstrandum. Hoc Theorema Campanus sic proponit,

Si fuerint duæ Quantitates, quarum vna sit pars alterius, minuaturq; ab vtraque ipsarum ipsa pars: erit reliquum reliqui vt totum totius æquemultiplex.

Partem hoc loco pro Submultiplici sumit. Sit itaq; Quâtitas AB tanta pars Quantitatis CD , quanta EB ipsius AB : minuaturq; AB ex Quantitate CD , & reliquum sit FC : vt FD sit æqualis AB . minuatur etiam EB ex Quâtitate AB , & sit reliquum EA . Dico reliquum FC tam multiplex esse reliqui AE , quàm multiplex est totum CD totius AB .



Quum enim FD sit æqualis AB , erit FD ita multiplex EB vt CD est multiplex AB . Ponam itaque DG tam multiplicem AE , quàm FD est multiplex EB .

Eritq; , per primam huius, FG tam multiplex AB , quàm FD est multiplex EB . Et quia sic fuit CD multiplex AB , vt FD multiplex EB : erit vtraque duarum Quantitatum CD & FG æqualiter multiplex Quantitatis AB . Quapropter, ex communi Notione, CD & FG sunt æquales. Demptra igitur FD ab vtraque ipsarum: erit CF æqualis DG . Et quia DG sic fuit multiplex AE sicut FD multiplex EB : ob id, sicut AB multiplex EB : ob idq; , sicut CD multiplex AB : erit

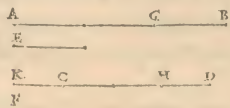
CF

CF ita multiplex AE vt tota CD totius AB, Quod erat demonstrandum.

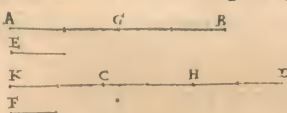
THEOREMA 6, PROPOSITIO VI.

Si duæ Magnitudines duarum Magnitudinum æquemultiples fuerint, auferanturq; aliquæ earundem æquemultiples: erunt & reliquæ vel eisdem æquales, vel ipsarum æquemultiples.

Sint duæ Magnitudines, AB quidem, Magnitudinis E : & CD, Magnitudinis F æquemultiples : & ablata ex his AG & CH, earundem E & F æquæ sint multiples. Dico reliquas GB & HD eisdem E & F aut æquales, aut ipsarum æquemultiples.



Sit enim primum GB æqualis ipsi E. Dico & HD ipsi E esse æqualem. Ponatur ipsi F æqualis CK. Et quoniam æquemultiplex est AG ipsius E vt CH ipsius F : æqualis autem GB ipsi E, & CK ipsi F : æquæ igitur, per primam huius, est multiplex AB ipsius E, vt HK ipsius F. Æquæ autem ponitur multiplex AB ipsius E, vt CD ipsius F. Æqualis igitur est HK ipsi CD. Communis auferatur CH. Reliqua igitur CK, reliquæ HD est æqualis. Sed F ipsi CK est æqualis. Quare & F ipsi HD est æqualis, Quod erat ostendendum.



Si verò GB sit multiplex ipsius E : ponam CK ipsius F æquemultiplicem. Eritq; vt prius, AB ipsius E æquemultiplex, per primam huius, vt HK ipsius F. Sed & sic posita fuit æquemultiplex AB ipsius E vt CD ipsius F. Erit igitur HK ipsi CD æqualis : Et ablata communi CH, reliqua CK, reliquæ HD æqualis. Quare quum GK sit ipsius F æquemultiplex vt GB ipsius E : erit & HD ipsius F æquemultiplex vt GB ipsius E, Quod fuit demonstrandum.

Hæc Demonstratio prima specie videbitur non planè satisfacere menti Euclidis. Nego enim, inquiet aduersarius, ablatam GB posse esse æqualem ipsi E : nego id quoque, posse esse multiplicem eiusdem. quin tu hoc proba.

Sed id propius intuenti probatione non indigebit. Nam quum AB sit multiplex ipsius E : erunt aliquot Magnitudines in AB æquales ipsi E. Quumq; AG itidem sit multiplex ipsius E : erunt & aliquot Magnitudines in AG æquales ipsi E, sed pauciores quàm in AB. Supererit ergò, vt reliqua GB sit aut æqualis ipsi E, aut eiusdem multiplex.

VT tamen omni ex parte integram demus Demonstrationem, Sit Magnitudo AB, Magnitudinis CD multiplex æqualium partium (scilicet CD cõtineatur aliquoties in AB, vt nihil superfit) : Et ex AB auferatur AE, quæ sit multiplex & æqualium partium eiusdem CD. Dico reliquam EB, eidem CD aut esse æqualem, aut ipsius multiplicem æqualium partium.

Si enim neque sit æqualis, neque multiplex : ponatur EF ipsi CD æqualis : vt reliqua FB sit minor CD, si fieri possit. Et diuidatur AE in Magnitudines ipsi CD æquales : scilicet in AG, & GE. Quoniam igitur AG, GE, & EF sunt ipsi CD æquales, sed FB minor ipsa CD : non diuiditur ergò tota AB in partes ipsi CD æquales. Non est igitur ipsius multiplex æqualium partium, quod est contra hypothesin. Addidi æqualium partium, propter id quod diximus initio Definitionum, verbum Multiplicis etiam ad inæqualitatem extendi. Sed inter docendum, ob facilitatem assumuntur æqualia Multiplicia. Inæqualium enim, nempe Superpartientium & Superparticularium, ædiósâ & obscurâ est diuisio. Sed tamen vtrobique ratio eadem.

1 2 THEO

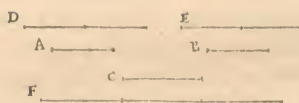
THEOREMA 7, PROPOSITIO VII.

Aequales, ad eandem habent eandem rationem: & eandem ad æquales.

Sint æquales Magnitudines A & B: alia autem quævis Magnitudo c. Dico vtranque A & B, ad ipsam c eandem habere rationem: Et c, eandem rationem habere ad vtranque.

Sumantur ipsarum A & B æquemultiples D & E: ipsius verò c, alia vtrunque multiplex F. Quoniam igitur æquemultiplex est D ipsius A vt E ipsius B: æqualis autem est A ipsi B: æqualis igitur, per communem Notionem, erit D ipsi E. Si ergo excedit D ipsam F, excedit & E eandem F: & si æqualis, æqualis: & si minor, minor. Est igitur vt A ad c, sic B ad c, per sextam Definitionem huius, Quod est prius.

Dico etiam c ad vtranque ipsarum A & B, eandem habere rationem. Nam ijs-



dem positis, erit, ex communi sententia, æqualis D ipsi E. Si igitur excedit F ipsam D, excedit & ipsam E: & si æqualis, æqualis: & si minor, minor. Quare, per eandem sextam Definitionem, erit sicut c ad A, ita c ad B, Quod erat demonstrandum.

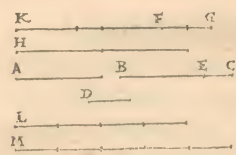
Hoc c posterius poterit expeditius demonstrari. Nam quum constiterit sicut D ad c, ita E ad c: erit conuerso modo, per Consectarium quartæ huius, sicut c ad A, ita c ad B. Et hoc Theorema ex ijs est, quæ inter animi sensa habenda esse videbantur.

THEOREMA 8, PROPOSITIO VIII.

Inæqualium Magnitudinum maior ad eandem, maiorem habet rationem, quàm minor: Et eadem ad minorem, maiorem habet rationem, quàm ad maiorem.

Sint duæ Magnitudines inæquales, A & B C, quarum maior B C: sit autem tertia Magnitudo D. Dico, maiorem esse rationem B C ad D, quàm A ad eandem D: Contra, maiorem esse rationem D ad A, quàm D ad B C.

Ad prioris partis demonstrationem, intelligendæ sunt B C prima, D secunda: A tertia, & rursus D quarta. Deinde primæ & tertiæ æquemultiplicia, itemq; secundæ &



quartæ, sic constituenda: vt multiplex primæ excedat multiplex secundæ, multiplex verò tertiæ non excedat multiplex quartæ: iuxta sententiam octauæ Definitionis. Quod hac ratione fiet. Quoniam maior est B C quàm A: ponam B E ipsi A æqualem: ac eousque multiplicabo æqualiter vtranque partem E C & E B, vt ex E C proueniat

quantitas maior quàm D: quæ sit F G: & ex E B, quantitas non minor quàm eadem D: quæ sit F K. Eritq; propter æqualem multiplicationem, F K tam multiplex E B, quàm F G multiplex E C: ob idq; per primam huius, erit tota G K totius B C æquemultiplex vt F K ipsius E C. Ponam insuper H tam multiplicè ipsius A, quàm G K ipsius B C, ac per hoc, quàm F K ipsius E B. Erutq; vt F K & H æquales: quæ vtriusq; submultiples positæ sint æquales. Quia igitur F K non est ipsa D minor: neq; H eadem D minor erit. Nunc autè multiplico D, donec proueniat quæritas proximè maior quàm H. Scilicet sumo duplum ipsius D: inde triplum: ac deinceps vno plus, quoad proueniat quæritas M, proximè maior quàm H: sumo postmodum ipsius D multiplicem quantitatem proximè minorem multiplici M: quæ sit L: vt ipsa M constet ex L & D. Eritq;

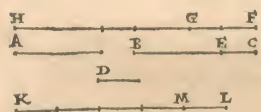
L non

L non minor quàm H: quum M sit proximè maior ipsa H. Quumq; H sit æqualis F K: non erit F K minor L: Neque item F K & D, minores erunt quàm L & D: ac propterea non minores quàm M. Et quia F G est maior D: erit tota G K maior M. Quumq; ad primam B C & tertiam A, sumptæ sint æquemultiplices G K & H: ad secundam verò & quartam (quæ est eadem D) æquemultiplex M sumpta sit, instar duarum: & G K multiplex primæ excedat M multiplex secundæ, neque H multiplex tertie excedat eandem M multiplicem quartæ: Erit, per octauam Definitionem huius, maior proportio B C ad D, quàm A ad eandem D, Quod est prius.

Secundum autem demonstratur ex eadem Definitione, conuerso ordine Magnitudinum: vt D sit prima, A secunda: D rursus tertia, & B C quarta. Excedit enim M multiplex primæ, H multiplicem secundæ: neque eadem M multiplex tertie, excedit G K multiplicem quartæ. Quare maior est proportio D ad A, quàm D ad B. Sicq; patet tota Propositio.

HANC Campani Demonstrationem, quum paulò esset clarior Demonstratione Theonis, aliquanto etiam clariorem fecimus. Quæ sic tamen obscura est. In quo mirari subit, quum huius Quinti Libri Propositiones in communi intelligentia positæ sint, sicut antea monuimus, ac prima specie quendam veluti consensum in animis pariant: quòd tam implicatè demonstrantur. Huic igitur loco rursus compendium simul & lucem attulimus.

Sint duæ Magnitudines A & B C, quarum maior B C: sitq; tertia quantacunque Magnitudo D. Dico maiorem esse rationem B C ad D, quàm A ad D.



Intelligentur vt prius, B C prima, D secunda, A tertia, & rursus D quarta. Earumq; parentur æquemultiplicia ad hunc modum. Quoniam maior est B C, quàm A: pono E B ipsi A æqualem: Et vtranque E C & E B æqualiter sic multiplico, vt ex E C proueniat quantitas maior quàm D: quæ sit F G: & ex E B, quantitas non minor quàm eadem D: quæ sit G H. Eritq; propter æqualem multiplicationem, G F æquemultiplex ipsius E C vt G H ipsius E B: ob idq; per primam huius, tam multiplex est G H ipsius E B, sicq; ipsius A, quàm tota F H totius B C. Habeo itaque F H æquemultiplicem ipsius B C primæ, & G H ipsius A tertie. Nunc autem multiplico D donec exurgat quantitas proximè maior quàm G H: scilicet sumo ipsius D duplum, indè triplum: ac continenter vno plus. Et produco K L, quæ sit prima multiplex, maior ipsa G H. Et ex K L, refeco L M simplum & æquale ipsi D. Est igitur K L ipsius D vtcunque multiplex, instar duarum, quatenus est D secunda & quarta. Et quoniam K L est proximè maior ipsa G H: non erit eadem G H minor K M. Et quia F G est maior D, & L M eidem D æqualis: excedet F H multiplex primæ, ipsam K L multiplicem secundæ. Sed quum K L posita sit maior quàm G H: non excedet ipsa G H multiplex tertie, K L multiplicem quartæ. Quare, per octauam Definitionem huius, maior est ratio B C ad D, quàm A ad D, Quæ est prior pars Theorematis.

Altera autem modò probata est: scilicet ex eadem Definitione, conuerso ordine Magnitudinum & Multiplicium.

THEOREMA 9, PROPOSITIO IX.

Quæ ad eandem habent eandem rationem, Magnitudines, inter se sunt æquales: Et ad quas eandem habet eandem rationem, eæ quoque sunt æquales.

Sit duarum Magnitudinum A & B eadem ratio ad C Magnitudinē. Dico A & B esse æquales. E conuerso, si eadem sit ratio C ad vtranque earum: dico & sic ipsas esse æquales. Conuersa seprimæ huius.



Prior pars sic probatur. Si enim non sunt æquales : erit altera ipsarum, vt A, maior.

Et erit, per priorem partem antecedentis, maior ratio
 $\frac{A}{C}$ ad $\frac{B}{C}$, quàm B ad C, cōtra hypothesin. Secunda verò
 sic. Si A est maior B : erit, per secundam partem antece-
 dentis, maior ratio C ad B, quàm C ad A, contra hypothesin.

THEOREMA 10, PROPOSITIO X.

Quæ duarum Magnitudinum ad eandem maiorem ra-
 tionem habet, hæc maior est. Ad quam autem duarū,
 eadem maiorem rationem habet, hæc minor est.

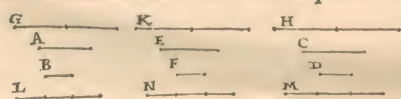
Si fuerit ratio maior A ad C, quàm B ad D : dico A esse maiorem B. Si verò fuerit ra-
 tio maior C ad B, quàm C ad A : dico econtrariò B maiorem esse quàm A. Conuersa
 octauæ.

Prior pars cōstat ex priori parte septimæ & priori octa-
 uæ. Nam per priorem septimæ, non erit A æqualis B : Et per
 priorem octauæ, non erit minor. Secūda verò patet ex secundis partibus earundem.

THEOREMA 11, PROPOSITIO XI.

Quæ eidem sunt æquales rationes, & inter se sunt
 æquales.

Sit ratio A ad B & ratio C ad D, vtrique æqualis rationi quæ est E ad F. Dico duas
 rationes A ad B & C ad D esse æquales : esse scilicet sicut A ad B, ita C ad D.



Sumantur G ad A, & H ad C, & K ad E
 æquemultiplices : itemq; L ad B, & M ad D,
 & N ad F, aliæ vtcunque æquemultiplices.

Et quia ponitur E ad F sicut A ad B &
 sicut C ad D : erit, per conuersam sextæ Definitionis bis sumptam, si K excedat N,
 vt G excedat L, & H excedat M : & si æquale, æquale : & si minus, minus. Si igitur
 G excedat N, excedet H ipsum M : & si æquale, æquale : & si minus, minus. Quare
 per sextam Definitionem, erit vt A ad B, ita C ad D, Quod erat probandum.

In hac demonstratur idem, vt dicitur, per idem. Tam enim confessā est sim-
 plicium comparatio, quàm excessus & æqualitas Æquemultiplicium : quanuis aliter
 probari posse non negem. Sed quorsum? quum sit animi sensum, ac sub eo Princi-
 pio audiatur, Quæ eidem sunt æqualia, inter se sunt æqualia? Quod certè ita genera-
 le est & vniuersum : vt in omni arte, in omni specie, in omni denique ingenij exer-
 citatione, assensionem & probationem præ se ferat. Sed tamen huiusce rei defensio-
 nem iam antè occupauimus in prima huius.

THEOREMA 12, PROPOSITIO XII.

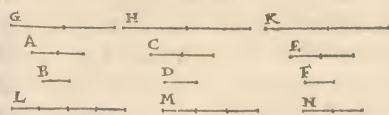
Campano 13.

Si singulæ Magnitudines ad singulas eandem habeant ra-
 tionem: erunt, sicut vna antecedentium ad vnam con-
 sequentium, sic omnes antecedentes ad omnes conse-
 quentes.

Quod prima proposuit de Multiplicibus, hæc in vniuersum de quibuscunq; Ma-
 gnitudinibus.

Sint Magnitudines singulæ A, C, E, ad singulas B, D, F, eandem rationem habentes:

tes: nempe sicut A ad B, ita C ad D & E ad F. Dico esse sicut A ad B, ita omnium simul A C E, ad omnes simul B D F.



Sumantur ipsarum A, C, E, æquemultiplicia G, H, K: & ipsarum B, D, F, alia utcumq; æquemultiplicia L, M, N. Eritq; per primā huius, totū ex G, H, K, ita multiplex totius ex A, C, E, ut G est multiplex A: itidemq; totum ex L, M, N, ita multiplex totius ex B, D, F, ut L est multiplex B. Et per conuersionem sextæ Definitionis bis sumptam, si G excedit L, & H excedet M, & K excedet N: & si æquale, æquale: & si minus, minus. Itaque, per communem Notionem, si G excedit L: excedit & totum ex G, H, K, totum ex L, M, N: & si æquale, æquale: & si minus, minus. Quare, per eandem Definitionem, erit sicut A ad B, ita totum ex A, C, E, ad totum ex B, D, F, Quod erat probandum.

THEOREMA 13, PROPOSITIO XIII.

Campano 12.

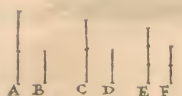
Si primæ ad secundam eadem fuerit ratio quæ tertiæ ad quartam: tertiæ verò ad quartam maior fuerit ratio, quàm quintæ ad sextam: primæ quoque ad secundam maior erit ratio, quàm quintæ ad sextam.

Sit eadem ratio A ad B quæ C ad D: maior autem C ad D, quàm E ad F. Dico maiorem quoque esse rationem A ad B, quàm E ad F.



Sumam G ad A, & H ad C æquemultiplicia: Itemq; L ad B, & M ad D, & N ad F, alia æquemultiplicia.

Et quia eadem est ratio C ad D quæ est A ad B, sed maior quàm E ad F: erit, per conuersionem sextæ Definitionis, si H excedit M, ut G necessarîo excedat L. At, per conuersionem octauæ Definitionis, si H excedit M, non necessarîo K excedet N. Si igitur G excedit L, non necessarîo K excedet N. Quare maior est ratio A ad B, quàm E ad F, Quod fuit probandum.



Hoc autem totum nil aliud est, quàm Si fuerint duo inter se æqualia, vnum verò illorum tertio quopiam maius: erit & reliquum tertio maius.

EX CAMPANO. Quòd si sit eadem ratio A ad B quæ C ad D, sed C ad D maior quàm E ad F: erit & A ad B maior quàm E ad F. Nam si sit C ad D minor quàm E ad F: erit E ad F maior quàm C ad D. Per conuersionem igitur maioris Improportionalitatis, si K excedit N, non necessarîo H excedet M. Sed si H non excedit M, neque C excedet L. Per Definitionem igitur maioris Improportionalitatis, maior erit proportio E ad F, quàm A ad B. Itaque econuerso, minor erit A ad B, quàm E ad F, Quod erat ostendendum. Sed hoc non admodum exquisitæ probationis. Quod autem sequitur maioris est momenti,

Si fuerit primæ quatuor Quantitatum, ad secundam maior ratio, quàm tertiæ ad quartam: aliqua erunt æquemultiplicia primæ & tertiæ, quæ quum comparabuntur ad aliqua æquemultiplicia secundæ & quartæ, inuenietur multiplex primæ maius esse multiplici secundæ: non autem multiplex tertiæ, multiplici quartæ. Quod sic probatur.

Sit maior proportio AB ad C, quàm D ad E. Ponaturque proportio AF ad C sicut D ad E. Et erit, per hanc & decimam, AF minor AB. Et sit minor in quantitate FB. Hanc FB multiplicabo, donec proueniat quantitas maior C: quæ sit

1 4 CH:

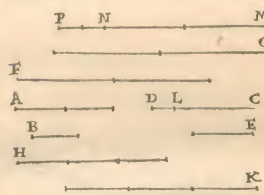
GH: hac lege, ut D toties multiplicata, producat quātitatem non minorem E: quæ sit K. Tunc faciam vt LG sit tam multiplex AF, quā G H est multiplex ipsius FB, aut K ipsius D. Eritq; , per primam huius, LH ita multiplex ipsius AB ut K ipsius D. Ponam postmodum M primam quantitatem multiplicem E, quæ sit maior K: & ponam N ita multiplicem C, vt M est multiplex E. Eritq; ex positionibus, & ex conuersione sextæ Definitionis, quantitas N prima multiplicium C, quæ erit maior LG: nec erit LG minor C. Sumam itaque sub N, maximam multiplicium C: aut ipsi æqualem, si fortè N sit prima multiplicium illius: quæ sit O: Constatitq; N, ex O & C. Quia ergo LG non est minor O, & GN est maior C: erit LH maior N. Quare quum K sit minor M, patet propositio.

HÆC Campanus. Cuius breuitatem ferè vbique laudauī. Hic verò ob compendium, manca apparet Demonstratio. Non enim satis explicat, quantitatem N esse primam multiplicium quæ sit maior LG. Hoc igitur probandum fuit ex quarta huius. Quum enim sit sicut D ad E, ita AF ad C: sitq; K ipsius D æquemultiplex vt GL ipsius AF: itemq; M ipsius E vt N ipsius C: erit, per quartam huius, sicut K ad M, ita GL ad N. Sed K ad M proximè minor est ipsa M. Et GL igitur proximè minor est ipsa N.

Quod autem dicit, ex positionibus, hoc innuit: quod quum GL sit eodem modo multiplex ipsius AF, quo & K ipsius D: sitq; D ad E sicut LG ad AF: erit LG maior C, quum K maior quā E posita sit.

RVRVS Campanus. Conuersam quoque huius demonstrare poterimus. Videlicet, si reperiantur aliqua æquemultiplicia primæ & tertix: itemq; alia secundæ & quartæ æquemultiplicia: & multiplex primæ superet multiplex secundæ, neque multiplex tertix superet multiplex quartæ: maior erit proportio primæ ad secundam, quā tertix ad quartam. Quod sic demonstratur.

Sint quatuor Quantitates, A prima, B secunda: C D tertia, & E quarta: sintq; F ad A & G ad C D æquemultiplicia: similiter H ad B & K ad E, æquemultiplicia: & F superet H, neque G superet K. Dico maiorem esse rationem A ad B, quā C D ad E.



Si enim fuerit æqualis: fiet vt G superet K, per conuersionem sextæ Definitionis: quod est contra hypothesin. Si autem minor: ponatur CL ad E sicut A ad B. Eritq; per huius decimam, CL minor C D. Et sit minor in quantitate LD. Ponam igitur vt MN sit ita

multiplex CL, & NP ita multiplex LD, sicut F est multiplex A. Eritq; , per primam huius, MP ita multiplex C D vt F est multiplex A. Vtraq; igitur duarum Quantitatū MP & G, est æquemultiplex Quantitatis C D: quapropter ipsæ inter se æquales, per ea quæ demonstrata sunt in septima huius. Et quia G non est maior K, non erit MP maior eadem. Sed per conuersionem sextæ Definitionis, MN est maior K: quum F sit maior H. Maior igitur MN, ipsa MP, Quod fieri non potest. Quare constat propositio. Hæc ille. Sed ne hæc quidem Demonstratio quicquam habet egregium, Probat enim quod probatione non indiget, immò quod iam sæpe in probationem assumpsimus superiorum Theorematum. Prior tamen non contemnenda: quod ostendat rationem sic constituendorum Æquemultiplicium, vt multiplex primæ superet multiplex secundæ, sed multiplex tertix non superet multiplex quartæ.

THEOREMA 14, PROPOSITIO XIII.

Si primæ ad secundam eadem fuerit ratio quæ tertix ad quartam,

quartam, prima verò maior fuerit, quàm tertia: erit
& secunda maior, quàm quarta: Et si æqualis, æqua-
lis: & si minor, minor.

Sit ratio A primæ, ad B secundam: vt C tertiæ, ad B quartam: & sit maior A, quàm C. Dico & B maiorem esse quàm D: & si æqualis, æqualem: & si minor, minorem.

Quum enim A sit maior quàm C: erit, per priorem partem octauæ huius, maior ratio A ad D, quàm C ad D: ob idq; maior A ad D, quàm A ad B. Quare, per secundam partem decimæ huius, erit B maior quàm D.

Si verò A sit æqualis C: erit, per priorem partem septimæ, A ad D sicut C ad D. Quare, per secundam partem nonæ, erit B æqualis D.

Quod si A sit minor quàm C, erit per priorem partem octauæ, minor ratio A ad D, quàm C ad D: ob id, maior A ad B, quàm ad D. Quare, per secundam partem decimæ, erit B minor quàm D. Ac sic patet Propositio.

THEOREMA 15, PROPOSITIO XV.

Magnitudines inter se, eandem habent rationem quam earum Aequemultiplicia inter se.

Sint C ad A, & D ad B æquemultiplicia. Dico eandem esse rationem C ad D quæ est A ad B.

Diuidatur C secundum quantitatem ipsius A: & D secundum quantitatem ipsius B. Eruntq; tot partes in C, æquales ipsi A: quot in D, ipsi B. Et quia quælibet pars ipsius C, ad quælibet partem ipsius D, est sicut A ad B: erit, per duodecimam huius, C ad D sicut A ad B, Quod erat ostendendum.

THEOREMA 16, PROPOSITIO XVI.

Si quatuor Magnitudines proportionales fuerint, permutatim quoque proportionales erunt.

Sit proportio A ad B sicut C ad D. Dico permutatim, esse A ad C sicut B ad D. Ponam E ad A, & F ad B æquemultiplices: itemq; G ad C, & H ad D æquemultiplices. Et erit, per antecedentem, E ad F sicut G ad H. Itaque, per decimam

quartam, si E est maior G: erit & F maior H: & si æqualis, æqualis: & si minor, minor. Quare, per sextam Definitionem huius, erit A ad C sicut B ad D,

Quod erat ostendendum.

Ex hoc manifestum est, vt ex Continua proportionalitate fiat Permutata, oportere quatuor Magnitudines esse eiusdem generis.

THEOREMA 17, PROPOSITIO XVII.

Si fuerint Magnitudines coniunctim proportionales, disiunctim quoque proportionales erunt.

Sit proportio AB ad BC sicut DE ad EF. Dico esse AC ad CB sicut DF ad FE.

Ponam GH ad AC & HK ad CB: item LM ad DF & MN ad FE, singulas singularum æquemultiplices: Ac rursus ipsarum

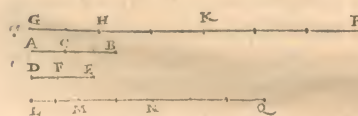


rum CB & FE, alias utcumque æquemultiplices KP & NQ. Et erit, per primam huius, GK ita multiplex AB ut GH est multiplex AC: & LN ita multiplex DE ut LM est multiplex DF. Sed quàm multiplex est GH ipsius AC, tam multiplex posita est LM ipsius DF: & continuè, quàm multiplex LM ipsius DF, tam multiplex est, per primam huius, LN ipsius DE. Quàm multiplex igitur GK ipsius AB, tam multiplex est, per undecimam huius, LN ipsius DE. Et quoniam HK & MN sunt ipsarum CB & FE æquemultiplices: item KP & NQ, aliæ earundem æquemultiplices: erunt, per secundam huius, KP & MQ, earundem CB & FE æquemultiplices. Per conuersionem igitur sextæ Definitionis, si GK multiplex AB, excedat HP multiplicem CB: excedet LN multiplex DE, ipsam MQ multiplicem FE: & si æqualis, æqualis: & si minor, minor. Ablatis itaque communibus HK & MN, si GH excedit KP, excedet & LM, per animi Notionem, MQ: & si æqualis, æqualis: & si minor, minor. Quare, per sextam Definitionem, erit sicut AC ad CB, ita DF ad FE, Quod erat demonstrandum.

THEOREMA 18, PROPOSITIO XVIII.

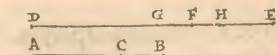
Si fuerint Magnitudines disiunctim proportionales, coniunctim quoque proportionales erunt.

Manente eodem Magnitudinum positu, sit AC ad CB sicut DF ad FE. Dico esse AB ad BC sicut DE ad EF. Conuersa antecedentis.



Singulis enim Æquemultiplicibus ad singulas Magnitudines accommodatis: erit, per conuersionem sextæ Definitionis, si GH excedit KP, ut LM excedat NQ: & si æqualis, æqualis: & si minor, minor. Quapropter positis communibus HK & MN: erit, per communem Notionem, si GK excedit HP, ut LN excedat MQ: & si æqualis, æqualis: & si minor, minor. Quare, per sextam Definitionem, erit AB ad BC sicut DE ad EF, Quod erat demonstrandum.

ALITER, si placet, ab impossibili. Quum sit AC ad CB sicut DF ad FE: sed non AB ad BC sicut DE ad EF: sit DE ad aliquam aliam, ut ad EG, Magnitudinem, sicut est AB ad BC. Atque ea erit maior ipsa EF, aut minor: Nam si æqualis ponatur, erit confessa propositio. Sit itaque primum EG maior quàm EF. Et erit, per antecedentem, AC ad CB sicut DG ad EG. Itaque, per undecimam huius, erit DG ad EG sicut DF ad FE. Quare, per decimamquartam eiusdem, quum DG prima, sit minor DF tertia: erit GE secunda, minor EF quarta. Sed GE posita fuit maior. Quare euertitur positio.



Sit iam sicut AB ad BC, ita DE ad EH, minorem quàm EF. Et erit, per antecedentem, AC ad CB sicut DH ad HE. Itaque, per undecimam, DH ad HE sicut DF ad FE. Et quia DH prima, est maior DF tertia: erit, per decimamquartam, EH secunda, maior EF quarta, Quod fieri non potest. Quare sicut AB ad BC, ita DE ad EF, Quod erat demonstrandum.

THEOREMA 19, PROPOSITIO XIX.

Si fuerit ut totum ad totum, sic ablatum ad ablatum: erit & reliquum ad reliquum sicut totum ad totum.

Quod quinta proposuit de Multiplicibus, hæc de Magnitudinibus in vniuersum. Sit

Sit itaque ut totum AB ad totum CD , ita ablatum BE ad ablatum DF . Dico esse & reliquum AE ad reliquum CF , ut totum AB ad totum CD .

Quum enim sit AB ad CD sicut BE ad DF : erit permutatum, AB ad B sicut CD ad DF : & disiunctim, AE ad EB sicut CF ad FD : & iterum permutatum, AE ad CF sicut EB ad FD . Et quia sic erat AB ad CD , constat propositio.

APPENDIX ex Campano. Ex hac & Permutata proportionalitate demonstratur Proportionalitas Euerſa. Ut si sit AB ad BE sicut CD ad DF : Dico esse BA ad AE sicut DC ad CF .

Nam quum sit AB ad BE sicut CD ad DF : erit permutatum, AB ad CD sicut BE ad DF . Ob id, per hanc decimamnonam, BA ad DC sicut AE ad CF . Quare permutatum, BA ad AE sicut DC ad CF , Quod erat ostendendum.

CONVERSA quoque Proportionalitas potest demonstrari indirectè, ex Permutata Proportionalitate & nona huius.

Ut si sit proportio A ad B sicut C ad D . Dico esse B ad A sicut D ad C .

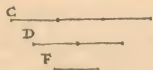
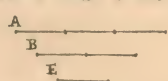
Sin minus: Sit D ad E sicut B ad A . Et quia A ad B est sicut C ad D : erit permutatum A ad C sicut B ad D . Et quia iterum B ad A sicut D ad E : erit quoque permutatum, B ad D sicut A ad E . Quare A ad E sicut A ad C . Si igitur E non sit æquale C : fiet contra secundam partem nonæ. Si autem æqualis: erit B ad A sicut D ad C , Quod fuit ostendendum. Hæc Campanus. Hoc autem postremum probatum fuerat supra ad quartam huius.

THEOREMA 20, PROPOSITIO XX.

Si fuerint tres Magnitudines unius ordinis, & aliæ totidem alterius, fuerintq; duæ unius in eadem ratione cum duabus alterius eodem situ positæ, prima autem unius fuerit maior tertia: erit & prima alterius maior tertia: & si æqualis, æqualis: & si minor, minor.

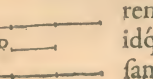
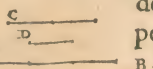
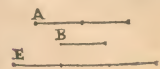
Hoc Theorema cum sequenti, proponitur ad Æquam proportionalitatem probandam.

Sint tres Magnitudines A, B, E , unius ordinis: tresq; C, D, F , alterius: sitq; A ad B sicut C ad D : & B ad E sicut D ad F .



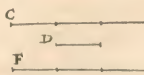
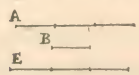
Dico si A est maior E , esse & C maiorem F : & si æqualis, æqualem: & si minor, minorem.

Si enim est maior: erit, per priorem partem octauæ huius, maior ratio A ad B , quàm E ad B : ob id, per duodecimam, maior erit C ad D , quàm E ad B . Et quia, per Conuersam proportionalitatem, E ad B est sicut F ad D : erit C ad D maior quàm F ad D . Quare, per priorem partem decimæ, maior est C , quàm F . Quod si A sit minor quàm E : probabitur iisdem argumentis C minor quàm F . Erit enim per priorem partem octauæ, minor ratio A ad B , quàm E ad B : ob idq; per duodecimam, & per Conuersam proportionalitatem, minor erit C ad D , quàm F ad D . Quare, per priorem partem Decimæ, erit C minor F . Si autem A sit æqualis E , erit per priorem partem septimæ, A ad B sicut E ad B : ob idq; per secundam partem undecimæ, & Conuersam proportionalitatem, erit C ad D sicut F ad D . Quare,



Quare, per priorem partem nonæ, erit c æqualis F , Quod erat demonstrandum.

Hic subiicit Campanus. Hanc Propositionem demonstraerunt quidam ex Permutata proportionalitate, ad hunc modum. Est A ad B sicut c ad D : ergo permutatim A ad c sicut B ad D . Et rursus quia B ad E sicut D ad F : erit permutatim B ad c sicut E ad F . Sed erat B ad D sicut A ad c . Ergo, per vndecimam,

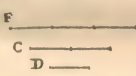
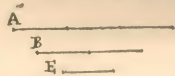


erit A ad c sicut E ad F . Quare, per decimam-quartam, si A prima, est maior E tertia: erit & c secunda, maior F quarta: & si æqualis, æqualis: & si minor, minor. Sed sic non rectè demonstrant. Nam si à Permutata proportionalitate argumentationem, ut cœperunt, perficiant: ij tandem Æquam proportionalitatem concludent: scilicet A ad c sicut E ad F : ergo permutatim A ad E sicut c ad F , Quæ est Æqua proportionalitas. Quod si Euclides sic concludi posse vidisset: frustrà hoc præmisisset Theorema: sed Æquam proportionalitatem statim astruxisset. Quum itaque hæc ratiocinatio non procedat, nisi vtriusque ordinis Magnitudines sint eiusdem generis: minus conuenienter ad singulare contrahunt quod Euclides generatim proposuit.

THEOREMA 21, PROPOSITIO XXI.

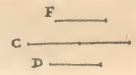
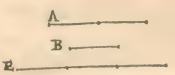
Si fuerint tres Magnitudines vnus ordinis, totidemq;
Magnitudines alterius, fuerintq; earum Perturbata
ratio, prima verò vnus ordinis, fuerit maior tertia:
erit quoque prima alterius, maior tertia.

Sint tres Magnitudines A, B, E , vnus ordinis: tresq; aliæ F, C, D , alterius: & sit proportio inter eas Perturbata: scilicet A ad B sicut c ad D , & B ad E sicut F ad c . Dico si A est maior E : esse & F maiorem D : & si minor, minorem: & si æqualis, æqualem.

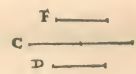
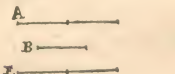


Hoc autem probatur iisdem argumentis quibus superior. Si enim A sit maior E ,

erit maior ratio A ad B , quàm E ad B : atque ob id, maior c ad D , quàm E ad B : quapropter & maior quàm c ad F : quia ut E ad B , sic c ad F , per Conuersam proportionalitatem. Quare, per secundam partem decimæ, maior est F quàm D .



Quod si A minor sit quàm E : erit, gradatim argumentando, minor c ad D , quàm ad F . Quare, per secundam partem eiusdem, erit F minor D .



Si verò A sit æqualis E , erit c ad D sicut c ad F . Quare, per secundam partem nonæ, erit F æqualis D . Ac sic constat Propositio.

Hæc itaque cum antecedente, quia ad probationem Æquæ proportionalitatis spectat: Æquemultiplicium rationem vtrique præcipuè considerat. Atque hunc sensum habent, ut non possit prima vnus ordinis maior esse tertia, quin prima alterius sit quoque maior tertia: & si æqualis, æqualis: & si minor, minor. Breuiter, hæc verba excessus & æqualitatis omnino sic accipienda, ut in Definitione sexta huius. Atq; hoc ad duarum sequentium intelligentiâ monere commodum fuit.

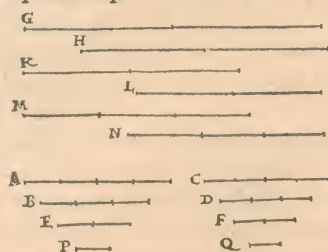
THEOREMA 22, PROPOSITIO XXII.

Si fuerint tres Magnitudines vnus ordinis, totidemq;
alterius, fuerintq; binæ vnus ordinis in eadem ra-
tione cum binis alterius similiter sumptis: eæ &
ex æquali proportionales erunt.

Sint

Sint tres Magnitudines A, B, E, vnus ordinis: aliaq; totidem alterius, C, D, F: sitq; A ad B sicut C ad D, & B ad E sicut D ad F. Dico esse A ad E sicut C ad F.

Ponam G ad A, & H ad C æquemultiplicia: itemq; K ad B, & L ad D, alia æquemultiplicia. Rursus M ad E, & N ad F, alia æquemultiplicia. Et erit per



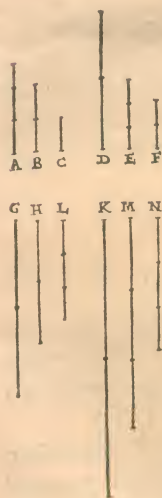
quartam: aut, si mauis, per decimamquartā huius, G ad K sicut H ad L: & K ad M sicut L ad N. Itaque, per vigesimā eiusdem, si G est maior M, erit H maior N: & si æqualis, æqualis: & si minor, minor. Quare, per sextam Definitionem huius, erit A ad E sicut C ad F, Quod fuit ostendendum.

I A M verò si fuerint Magnitudines plures tribus in utroque ordine: erit omnino prima ad vltimā vnus, vt prima ad vltimā alterius: scilicet in Æqua proportionalitate. Vt, si addantur P & Q: & sit E ad P sicut F ad Q: Dico esse A ad P sicut C ad Q. Erit enim A ad E sicut C ad F, vt modò demonstraui. Sepositis igitur B & D, erunt tres Magnitudines A, E, P, vnus ordinis, tresq; alterius C, F, Q, eiusdem conditionis cum prioribus. Quare A ad P sicut C ad Q, Quod erat ostendendum.

THEOREMA 23, PROPOSITIO XXIII.

Si fuerint tres Magnitudines vnus ordinis, totidemq; alterius, fueritq; perturbata inter ipsas ratio: eæ & ex æquali proportionales erunt.

Sint tres Magnitudines vnus ordinis A, B, C: atque aliæ totidem alterius D, E, F. Sitq; A ad B sicut E ad F: & B ad C sicut D ad E. Dico esse A ad C sicut D ad F.



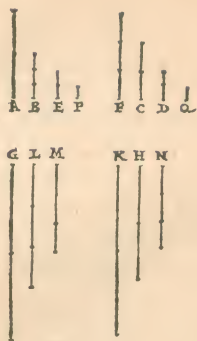
Ponam G, H, K, ad A, B, D, æquemultiplicia: aliaq; L, M, N, ad C, E, F, æquemultiplicia. Et erit, per decimamquintā huius, vt A ad B, sic G ad H. Et quoniam vt A ad B, sic E ad F: erit, per vndecimā, vt G ad H, sic E ad F. Quumq; sit vt E ad F, sic M ad N, per ipsā decimamquintā: erit & per vndecimā, vt G ad H, sic M ad N. Et quoniam vt B ad C, sic D ad E: erit per quartā huiusce, vt H ad L, sic K ad M. Sunt itaque G, H, L tres Magnitudines, & K, M, N aliæ totidem, perturbatim proportionales. Si igitur G excedit L, & K excedet N: & si æqualis, æqualis: & si minor, minor. Quare, per sextam Definitionem, erit vt A ad B, sic D ad F, Quod erat ostendendum.

ALITER possunt sumi Æquemultiplicia. Sint enim tres Magnitudines vnus ordinis A, B, E, totidemq; F, C, D, alterius: & sit vt A ad B, sic C ad D: & vt B ad E, sic F ad C. Dico esse A ad E sicut F ad D.

Sumam G, H, K ad A, C, F, æquemultiplicia: aliaq; L, M, N ad B, E, D, æquemultiplicia. Et erit, per quartā huius, G ad L sicut H ad N: & per decimamquintā, L ad M sicut K ad H. Erunt itaque, vt prius, Æquemultiplicia vtriusque ordinis, in ratione perturbata inter se. Ob id, per vigesimā primā, si G excedat M, & K excedet N: & si æqualis, æqualis: & si minor, minor. Quare, per sextam Definitionem, erit vt A ad E, sic F ad D, Quod erat probandum.

m

Quod



Quod si plures tribus fuerint Magnitudines in vtroque ordine: verbi causa, quatuor: sitq; A ad B sicut D ad Q: & B ad E sicut C ad D: & E ad P sicut F ad C: erit & in æqua proportionalitate, A ad P sicut F ad Q. Nam quum probatum sit A ad E sicut C ad Q: sublati B & D, erunt tres quantitates, A, E, P, aliæq; totidem F, C, Q, in Perturbata ratione inter se. Quare A ad P sicut F ad Q, Quod erat demonstrandum.

A C quemadmodum ex Ternarij demonstratione probatur Quaternarius, seposito vno mediorum: ita ex Quaternario Quinarius, duobus sepositis medijs: & ex Quinario Senarius, tribus semotis medijs. Ac sic continenter. Quod & in superiori specie Æquæ proportionalitatis intelligendum Quamobrem, quum Ternarius totam probationem absoluat, disertè Euclides de tribus tantum Magnitudinibus proposuit.

THEOREMA 24, PROPOSITIO XXIII.

Si fuerit primum ad secundum, vt tertium ad quartum:
& item quintum ad secundum, vt sextum ad quartum: erit & compositum ex primo & quinto ad secundum, vt compositum ex tertio & sexto ad quartum.

Quod secunda proposuit de Multiplicibus, hæc generatim de Magnitudinibus proponit.

Sit itaque AB ad C vt DE ad F: itemq; BG ad C vt EH ad F. Dico esse AG ad C sicut DH ad F.

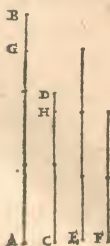
Erit enim, per Conuersam proportionalitatem, C ad BG vt F ad EH: quapropter ex vigesima secunda: erit in Æqua ratione AB ad BG vt ED ad EH: sumptis scilicet AB prima, C secunda, & BG tertia, vnus ordinis: atque DE prima, F secunda, & EH tertia, alterius. Igitur,

per decimamoctauam, AG ad GB vt DH ad HE. Quare quum sit posita BG ad C vt EH ad F: sumptis AG prima, BG secunda, & C tertia, vnus ordinis: atque DH prima, EH secunda, & F tertia, alterius: erit per vigesimam secundam, in Æqua ratione, AG ad C vt DH ad F, Quod erat ostendendum.

THEOREMA 25, PROPOSITIO XXV.

Si quatuor Magnitudines proportionales fuerint: maxima & minima reliquis duabus maiores erunt.

Sint quatuor Magnitudines proportionales: AB, CD, E, & F: vt AB ad CD, sic E ad F: sitq; earum maxima AB, minima verò F. Dico ambas AB & F, maiores esse ambabus CD & E.



Ponam AG æqualem ipsi E: & CH æqualem ipsi F. Et quoniam sicut tota AB ad totam CD, sic ablata AG ad ablatam CH erit & reliqua GB, per decimamnonam huius, ad reliquam HD, sicut tota AB ad totam CD. Maior autem est AB ipsa CD: Et maior igitur GB ipsa HD. Et quoniam æqualis est AG ipsi E, & CH ipsi F: erunt AG & F æquales ipsi CH & E. Addita ergo GB maiori ad duas AG & F: & HD minori ad duas CH & E: fient, per communem sententiam, AB & F, maiores quàm CD & E, Quod erat demonstrandum.

HACT

HACTENVS Euclides huius Quinti Proportiones tradidit. Nouem autem sequentes Propositiones à Campano additæ sunt, ex alieno quopiam exemplari. sicut & sæpè aliàs ordinem Euclidis deserit, pauca prætermittit, nonnulla substituit, aliaq; addit de suo. Neque infelici opera. Pleraque enim in demonstrando facit meliora & clariora, compendij officio: licet in quibusdam dormitet. Vt ut est, Campani constructionem retinuit incitando Euclide, Ioannes Regiomontanus nostræ ætatis Mathematicus clarissimus. Quin & sequentes Propositiones ab eo citatas inuenimus, in ea quam in Ptolemæum reliquit Epitome. Quæ res effecit ut illas apponeremus: alioqui libenter prætermisuri. Nam præter id quòd probationes quas ex ijs venatur Regiomontanus, abundè ex Euclide constant: etiam in hac Propositionum materia mihi videntur Propositiones refecandæ potius quàm in longiùs duccendæ. Nam quæ per se claræ sunt, locum tantum occupant: ingenium etiam onerant. Tædium enim multitudo vbique parit. Eæ itaque sic habent.

Prima Additarum.

Si fuerit quatuor Quantitatum proportio primæ ad secundam, maior quàm tertiæ ad quartam: erit conuersim econtrariò, secundæ ad primam, minor quàm quartæ ad tertiam.

Sit proportio A ad B maior quàm C ad D. Dico conuersim econtrariò, minorem esse proportionem B ad A, quàm D ad C.

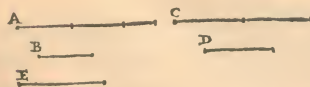
Si enim est eadem B ad A, quæ est D ad C: erit econtrariò A ad B vt C ad D, contra hypothesin. Si verò maior est B ad A, quàm D ad C: ponatur E ad A vt D ad C. Eritq; per duodecimam, E ad A minor quàm B ad A. Quapropter ex priori parte decimæ, erit E minor B: ob idq; ex secunda parte octauæ, maior erit proportio A ad E, quàm A ad B. Et quia, per Conuersam proportionalitatem, est A ad E sicut C ad D: erit, per duodecimam, proportio C ad D maior quàm A ad B. Sed erat minor. Ex repugnantia igitur, astruitur propositio.

Possumus & affirmatè demonstrare. Ponatur E ad B vt C ad D. Et erit econtrariò B ad E vt D ad C. Et quia maior est A quàm E, per priorem partem decimæ: erit, ex secunda parte octauæ, B ad A minor quàm B ad E. Quare, per duodecimam, B ad A minor quàm D ad C, Quod erat probandum.

I I.

Si quatuor Quantitatum fuerit maior proportio primæ ad secundam, quàm tertiæ ad quartam: erit permutatim, maior proportio primæ ad tertiam, quàm secundæ ad quartam.

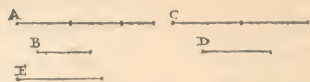
Sit maior proportio A ad B, quàm C ad D. Dico permutatim, maiorem esse A ad C, quàm B ad D.



Eadem enim non erit: quia tunc quoque esset permutatim, A ad B sicut C ad D. Quòd si sit minor: ponatur E ad C vt B ad D. Eritq; ex duodecima, E ad C maior quàm A ad C. Itaque, ex priori parte decimæ, erit E maior quàm A. Quapropter, ex priori parte octauæ, E ad B maior quàm A ad B. Et quia posita est E ad C sicut B ad D: erit permutatim,

tatim, E ad B sicut c ad d . Quare ex duodecima, maior erit proportio c ad d , quàm A ad B , Quod est contra hypothesein.

$I D E M$ per affirmationem. Sumatur E ad B vt c ad d . Eritq; ex priori parte decimæ, E minor A : propterea quòd, ex priori parte octauæ, maior est A ad c , quàm E ad c . Sed ex Permutata proportionalitate, est E ad c vt B ad d . Quare, per duodecimam, A ad c maior quàm B ad d , Quod erat ostendendum.



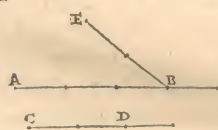
I I I.

Si fuerint quatuor Quantitates, quarum primæ ad secundam sit maior proportio, quàm tertiæ ad quartam: erit quoque coniunctim, maior proportio primæ & secundæ ad secundam, quàm tertiæ & quartæ ad quartam.

Sit maior proportio A ad B , quàm c ad d . Dico & maiorem esse proportionem totius $A B$ ad B , quàm totius $c d$ ad d .

Neque enim erit eadem: quia sic quoque disiunctim esset A ad B vt c ad d .

Quod si sit minor: sit $E B$ ad B vt $c d$ ad d . Eritq; ex duodecima huius, $E B$ ad B maior quàm $A B$ ad B . Itaque, ex priori parte decimæ, maior est ipsa $E B$ quàm tota $A B$. Et per communem Notionem, E maior quàm A . Quapropter, ex



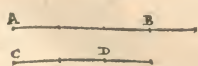
priori parte octauæ, maior est proportio E ad B , quàm A ad B . Sed E ad B est vt c ad d , per Disiunctam proportionalitatem: erat enim $E B$ ad B vt $c d$ ad d . Quare, per duodecimam, c ad d maior est, quàm A ad B , Quod est contra hypothesein.

$I D E M$ affirmatè. Quum posita sit maior proportio A ad B , quàm c ad d : ponatur E ad B vt c ad d . Eritq; ex priori parte decimæ, E minor A . Ob id, per animi Notionem, $E B$ erit minor quàm $A B$. Itaque, ex priori parte octauæ, maior erit proportio $A B$ ad A , quàm $E B$ ad B . At proportio $E B$ ad B , per Coniunctam proportionalitatem, est sicut $c d$ ad d . Posita enim est E ad B vt c ad d . Quare, per duodecimam, maior est $A B$ ad B , quàm $c d$ ad d , Quod erat ostendendum.

I I I I.

Si fuerint quatuor Quantitates: quarum primæ & secundæ ad secundam sit maior proportio, quàm tertiæ & quartæ ad quartam: erit quoque disiunctim proportio primæ ad secundam maior quàm tertiæ ad quartam.

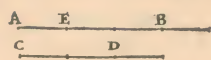
Sit proportio $A B$ ad B maior quàm $c d$ ad d . Dico & disiunctim, A ad B maiorem esse, quàm c ad d .



Æqualis quippe non erit. Nam, per Coniunctam proportionalitatem, esset $A B$ ad B vt $c d$ ad d . Si verò minor esse possit, vt sit maior c ad d , quàm A ad B : erit, per antecedentem, maior $c d$ ad d , quàm $A B$ ad B . Quod minimè conuenit: quum posita sit minor.

$I D E M$

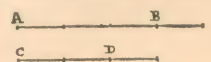
IDEM affirmatè. Ponatur EB ad B vt CD ad D. Eritq; ex priori parte decimæ, EB minor quàm AB: ob id, per animi Notionem, E est minor quàm A. Quare, ex priori parte octauæ, proportio E ad B minor est quàm A ad B, Quod erat ostendendum.



V.

Si fuerint quatuor Quantitates, quarum primæ & secundæ ad secundam maior sit proportio, quàm tertiæ & quartæ ad quartam: erit euersim, minor proportio primæ & secundæ ad primam, quàm tertiæ & quartæ ad tertiam.

Sit maior proportio AB ad B, quàm CD ad D. Dico euerso modo, minorem esse AB ad A, quàm CD ad C.

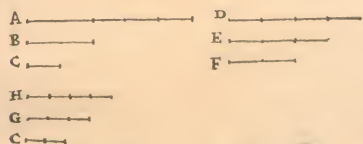


Erit enim disiunctim, per antecedentem, maior proportio A ad B, quàm C ad D. Igitur, per primam harum, e conuersò, minor B ad A, quàm D ad C. Quare, per tertiam earundem, coniunctim, minor erit AB ad A, quàm CD ad C, Quod erat demonstrandum.

V I.

Si fuerint tres Quantitates vnus ordinis, totidemq; alterius: fueritq; primæ priorū ad secundam, maior proportio, quàm primæ posteriorum ad secundam: erit quoque primæ priorum ad tertiam, maior proportio, quàm primæ posteriorum ad tertiam.

Sint tres Quantitates vnus ordinis A, B, C: aliæq; totidem alterius, D, E, F. Et sit maior proportio A ad B, quàm D ad E: Itemq; maior B ad C, quàm E ad F. Dico maiorem esse A ad C, quàm D ad F.



Sit enim G ad C vt E ad F. Eritq; ex priori parte decimæ huius, G minor B. Ob id, ex secunda parte octauæ, maior est ratio A ad G, quàm A ad B. Multò maior igitur est A ad G, quàm D ad E. Sit itaque H ad G vt D ad E. Eritq; ex priori parte decimæ, A maior quàm H. Ob idq; ex priori parte octauæ, maior ratio A ad C, quàm H ad C. Atqui H ad C, per Æquam proportionalitatem, est vt D ad F: est enim H ad G vt D ad E: & G ad C vt E ad F. Quare, per duodecimam, A ad C maior est, quàm D ad F, Quod erat demonstrandum.

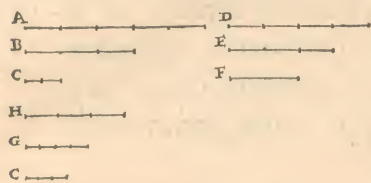
V I I.

Si fuerint tres Quantitates vnus ordinis, totidemq; alterius, fueritq; proportio secundæ priorum ad tertiam maior quàm primæ posteriorum ad secundam, itemq; primæ priorum ad secundam, maior quàm

m 3 secundæ

secundæ posteriorum ad tertiam : erit & maior proportio primæ priorum ad tertiam, quàm primæ posteriorum ad tertiam.

Sint tres Quantitates vnus ordinis, A, B, C : & aliæ totidem D, E, F, alterius: sitq; maior proportio B ad C, quàm D ad E: & maior A ad B, quàm E ad F. Dico maiorem esse A ad C, quàm D ad F. Hęc ad Æquam proportionalitatē pertinet.

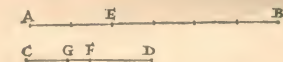


Sit enim G ad C vt D ad E. Et erit, per priorem partem decimæ huius, G minor B: ob id, per secundam partem octauæ, maior proportio A ad G, quàm ad B. Quapropter multo maior A ad G, quàm E ad F. Sit itaque H ad C vt E ad F. Eritq; ex priori parte decimæ, A maior H: ob idq; proportio A ad C maior quàm H ad C, per priorem partem octauæ. Atqui, per vigesimamtertiam, proportio H ad C est vt D ad F: quum sit G ad C vt D ad E, & H ad C vt E ad F. Quare, per duodecimam, maior est proportio A ad C, quàm D ad F, Quod erat demonstrandum.

VIII.

Si fuerit proportio totius ad totum, maior quàm ablati ad ablatum: erit & reliqui ad reliquum, maior proportio, quàm totius ad totum.

Sint duæ Quantitates, AB & CD: à quibus abscindantur AE & CF, sitq; reliqua EB & FD: & sit maior proportio AB ad CD, quàm AE ad CF. Dico & maiorem esse proportionem EB ad FD, quàm AB ad CD. Erit enim, per secundam additarum, permutatim, maior proportio AB ad AE, quàm CD ad CF.



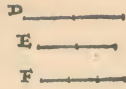
Ob idq; ex quinta earundem, erit euersim, minor proportio AB ad EB, quàm CD ad CF. Quare rursus permutatim, minor proportio AB ad CD, quàm EB ad FD, Quod erat demonstrandum.

IX.

Si fuerint tres Quantitates vnus ordinis, ac totidem alterius, fueritq; cuiuslibet antecedentis ad comparem, maior proportio, quàm cuiusquam subsequētis ad suam: erit & harum omnium ad omnes illas maior proportio, quàm alicuius subsequētium ad suā comparem, aut etiam quàm omnium ad omnes: minor autem, quàm prima ad primam.

Sint tres Magnitudines vnus ordinis, A, B, C: ac totidem alterius, D, E, F: sitq; maior proportio A ad D, quàm B ad E: & B ad F, quàm C ad F. Dico proportionem ABC simul sumptarum, ad DEF simul sumptas, maiorem quàm B ad E, & quàm C ad F: maiorem etiam quàm B & C simul sumptarum ad E & F simul sumptas: minorem autem, quàm A ad D.

Quum enim sit A ad D maior quàm B ad E: erit permutatim, A ad B maior quàm



quàm D ad E : & coniunctim, AB ad B ,
 maior quàm DE ad E . Et iterum permutatim, AB ad DE maior quàm B ad E .
 Quare, per antecedentem, A ad D maior
 quàm AB ad DE . Atque eodem modo probabitur maior ratio B ad E , quàm
 BC ad EF . Maior itaque est A ad D , quàm BC ad EF . Quare permutatim, ma-
 ior est A ad BC , quàm D ad EF . Et coniunctim, maior ABC ad BC , quàm
 DEF ad EF : Et iterum permutatim, maior ABC ad DEF , quàm CB ad EF :
 Quare, per antecedentem, maior est A ad D , quàm ABD ad DEF , Quod erat
 demonstrandum.

Libri Quinti Geometricorum Elementorum

FINIS.





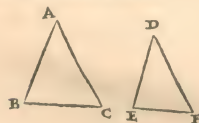
IACOBI PELETARII
CENOMANI IN EVCLIDIS
ELEMENTA GEOMETRICA
DEMONSTRATIONVM
LIBER SEXTVS.



DEFINITIONES.

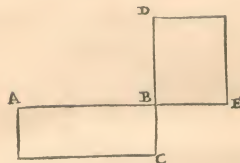


Similes Figuræ dicuntur, quæ angulos æquales habent ad vnũ, & latera quæ angulos æquales habent, proportionalia.



Vt si fuerint duorum Triangulorum ABC & DEF , anguli mutuò æquales: nempe angulus A angulo D : & angulus B angulo E : fueritq; latus AB ad latus DE , vt AC ad DF & BC ad EF : erunt hæc duo Triangula similia.

2 Reciprocae Figuræ dicuntur, quum vtriusque ipsarum mutua latera fuerint proportionalia.



Vt si fuerint duæ Figuræ, verbi gratia, Quadrilateræ, ABC & DEG : fueritq; latus AB ad latus DE , sicut latus BE ad latus BC : hæc duæ dicuntur Reciprocae. Sic enim stat proportionalitas, vt duo latera vnus sint antecedentia, & duo alterius sint consequentia. Atque eam ob causam, à nonnullis satis appositè vocantur Figuræ mutuorum laterum.

3 Per mediam & extremam rationem diuidi recta linea dicitur, quum sic fuerit tota ad maius segmentum, vt maius segmentum ad minus.

Id est, quod vulgò dicitur, linea diuidi secundum proportionem habentem medium & duo extrema. Vt si fuerit linea AB sic diuisa in puncto C , vt sit tota AB ad segmentum AC , vt idem AC ad CB .

Hanc diuisionem docuit vndecima Secundi, sed nulla proportionum mentione: quod nominatim docebit trigesima huius.

4 Altitudo Figuræ, est linea à vertice ad basin perpendiculariter deducta.

Triang

Trianguli ABC altitudo, est perpendicularis AD . Rectum enim, ut antea monuimus, omnia metitur. Vbi duarum linearum æquidistantia intelligitur: scilicet linea duci per punctum A , quæ sit basi BC parallelus. Quod si basis poneretur AB , huic duceretur parallelus per punctum C : sicut & ipsi AC (si fungeretur vice basis) per punctum B . Atque ab eo puncto ubi vertex esset, demitteretur perpendicularis, quæ altitudinem monstraret.



Ratio ex duabus rationibus aut ex pluribus constare dicitur, quum rationes Quantitatum inter se multiplicatæ, aliquam rationem efficiunt.

Rationes Quantitatum hoc loco dicuntur denominationes ipsarum proportionum. Ob id, vocem Quantitatis generaliore quàm Magnitudinis vsurpauit, vt significaret hunc locum sine Numerorum consideratione præteriri non posse.

Si itaque fuerint tres Quantitates AB , CD , & EF , quarum CD media: constabit ratio primæ AB ad vltimam EF , ex ductu rationis quam habet AB ad CD in rationem quam habet CD ad EF .



Hoc igitur totum ex eo sumptum est, quod Medij officium sit, extrema coniungere & colligare. Quod nos Numerorum auxilio declarabimus.

Ponatur enim ratio AB primæ ad CD mediam, sesquialtera seu sesqui-altera: sed CD mediæ ad EF extremam, dupla. Scilicet, quum AB ad CD sit sesquialtera: qualium partium est AB trium, talium CD sit duarum: Quumq; CD sit ad EF dupla: qualium duarum est CD , talis sit EF vnus. Habes itaque duos Denominatores Proportionum, nempe 1 & 2 : quos si inter se multiplicaueris, constabitur Denominatio primæ AB ad vltimam EF : scilicet Tripla.

Iam si plura sint Media, eadem etiam ex ijs constabit ratio, ac si vnicum esset. Vt si inter AB & EF , earundem quas posuimus partium, statuatur alterum Medium GH : manebit etiamnum ratio AB ad EF composita ex tribus rationibus, quæ ex duabus modò componebatur, quantacunque sit GH .



Sit enim vt prius, AB ad CD ratio sesquialtera: CD verò ad GH : subdupla: erit GH ad EF , quadrupla. Ducantur iam tres Denominatores inter se: scilicet 1 in 2 , fit 2 : Et 2 in 4 , fit 8 , id est Tripla denominatio. Quare, vt prius, AB ad EF tripla ratio, sed ex tribus rationibus composita. Quot igitur erunt termini, vt vocant, in tot partes diuidetur ratio primæ Quantitatis ad vltimam, dempta vnitate: seu maius, quot medij erunt termini, in tot partes diuidetur ratio, ac præterea in vnâ.

Atque vt vno verbo dicam, inter duas Quantitates, alias medias Quantitates collocare: nil aliud est, quàm proportionem ambarum in partes arbitrarias diuidere. Atque hoc satis esse putamus ad præsens institutum. Hæc enim qui ampliora cupiet, ex Arithmetice petat. Proportionum verò materiam in Tertio nostræ Arithmetice Libro abundè tractauimus.

SCIO NON defuturos qui non probent, quod Quantitatum rationes dixerim: non vt Euclides reliquit, Rationum quantitates. Quibus ego breuiter respondeo, me id vt doctrinæ consulerem fecisse. Nam si exempli causa quantitatem 4 ad quantitatem 2 , duplam habere rationem dixerem, scienter & significanter dixerem. Si verò rationi duplæ quantitatem esse: obscure & implicatè. Nam quum Quantitati ratio insit: rursus Rationi quantitatem inesse, circuitiōnem importat, quæ in disciplinis maximè fugienda est. Ratio igitur nobis ea est, quæ denominationem præ se fert: vt dupla, tripla, & quæ sunt eiusmodi. Atque hæc inter se multiplicant

plicantur : scilicet dupla ratio in triplam , quæ sextuplam parit : ac cæteræ suo modo. Neque hîc Quantitas in Quantitatem ducitur, vt linea in lineam. Sic enim fieret Parallelogrammum : quod huic loco est alienum. At nihil multiplicatur nisi quod quantum est. Certè. Et fateor quidem Rationes quantas esse. Sed circuitum illum vitare volui. Vnicuique tamen vt quantitates Rationum dicat, per me licet. Hîc enim agitur non dicendi, sed docendi ratio.

Id ETIAM obiter moncbimus, hanc Rationum compositionem, non esse Proportionum Additionem, vt quidam putarunt. Aliud quippè est, Rationes alias ex alijs componere, & aliud Rationes rationibus adiungere. Quod & in Arithmeti-
cis docuimus. Nos ad Propositio-
nes ingrediamur.



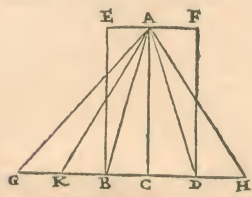
THEOREMA PRIMVM,
PROPOSITIO PRIMA.



Triangula eiusdem altitudinis, itidem & Parallelogramma, inter se sunt vt bases.

Sint duo Triangula ABC & ACD , eiusdem altitudinis. Dico vt est BC basis ad CD basin, sic esse ABC Triangulum ad ACD Triangulum. Sint etiam Parallelogramma CE & CF , eiusdem altitudinis. Dico itidem vt BC basis ad CD basin, sic CE Parallelogrammum ad CF Parallelogrammum.

Producam BD vtrinque in G, H puncta: Et ponam duas BK & KG ipsi CB equales: & DH ipsi CD . Tum connectam $AG, AK, \& AH$. Eruntq; Triangula $ABC, AKB, \& AGK$ inter se equalia, per trigessimam octauam Primi: itidem &

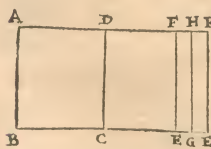


Triangula ACD & ADH , per eandem, inter se equalia. Ac proinde Triangulum AGC tam multiplex Trianguli ABC , quam basis GC multiplex ipsius basis BC . Itemq; Triangulum $A CH$, Trianguli ACD tam multiplex, quam basis CH ipsius basis CD . Et per eandem Primi, si GC basis equalis est CH basi: erit & Triangulum AGC equalis Triangulo $A CH$: & si maius, maius: & si minus, minus. Est igitur, per sextam Definitionem Quinti, sicut BC basis ad CD basin, ita ABC Triangulum ad ACD Triangulum, Quod est prius.

Quumq; Parallelogrammum EC duplum sit Trianguli ABC , per quadragessimam primam Primi: & Parallelogrammum FC , duplum Trianguli ACD , per eandem: erit, per decimam quintam Quinti, vt Triangulum ABC ad Triangulum ACD , sic Parallelogrammum EC ad Parallelogrammum FC , Quod fuit demonstrandum.

HOC AVTEM in communi iudicio totum positum est. Quod sic probabimus, vt Demonstrationis vice esse possit: simul ostendemus quam ratione inducatur Trigesima octaua Primi ad probationem excessus & imminutionis Aequemultiplicium, quum ipsa de equalitate tantum proposuerit.

Sit Parallelogrammum $ABCD$, eiusdem altitudinis vt Parallelogrammum $DCEF$. Dico vt est BC basis ad CF basin, sic esse $ABCD$ Parallelogrammum ad $DCEF$, Parallelogrammum.



Primum enim si equalia sint bases, non est dubium quin eadem sit ratio basium & Parallelogrammorum: quum sint & Parallelogramma equalia, per ipsam Trigessimam octauam Primi. Si vero inaequales fuerint: neque Parallelogramma equalia esse possunt, per eandem. Sit ergo BC maior CE , quam excedat quantitate EG : vt scilicet CG sit equalis ipsi BC . Et ducatur parallelus GH , perficiaturq; Parallelogrammum $DCGH$. Et erit ex ipsa iam inducta Propositione, Parallelogrammum $ABCD$ equalis Parallelogrammo $DCGH$. Quapropter, ex communi Notione, sicut $DCGH$ maius est $DCEF$, ita $ABCD$ maius est eodem $DCEF$. Ac propterea, quum BC maior sit CE , erit simul $ABCD$ maius $DCEF$. Simili argumentatione probabitur, si BC minor sit CB , simul $ABCD$ maius esse ipso $DCEF$. Vnde colligitur vt BC basis ad CE basin, ita $ABCD$ Parallelogrammum ad $DCEF$ Parallelogrammum. Nihil enim refert vtrum dicas, non posse esse primum maius secundo, quin tertium sit maius quarto: neque equalis, quin equalis: neque minus quin minus: an vero dicas, vt

primum

primum ad secundum, ita tertium ad quartum: licet illud nominatim ab Euclide positum sit *Æquemultiplicium* gratia, vt notum est ex Quinto. Atque hoc dictum volui, vt vbique admonerem, *Æqualitatem* esse omnium *Proportionum* originem & ducem.

THEOREMA 2, PROPOSITIO II.

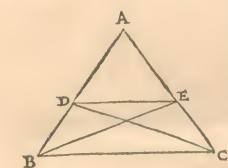
Si Trianguli duo latera recta linea sic secet, vt ipsa ad reliquum sit parallelus: duo latera proportionaliter secabit: & si proportionaliter duo latera secet: erit ipsa ad reliquum parallelus.

Sit Triangulum ABC , cuius duo latera AB & AC sic secet recta DE , vt ipsa sit lateri BC parallelus. Dico prius vt est BD ad DA , sic esse CE ad EA .

Connectantur BE & CD . Eritq; , per trigessimamseptimam Primi, Triangulum BED æquale Triangulo CED : Sunt enim inter Parallelos DE & BC , & eandem habent basin ED . Vtrunque igitur ad Triangulum AED eandem habet rationem, per septimam Quinti. Erit itaque vt BD ad AED , ita BD ad DA , per antecedentem: quum eundem habeant verticem E : similiter, per eandem, sicut CED ad AED , ita CE ad EA : eundem enim habent verticem D . Quare, per vndecimam Quinti, BD ad DA , sicut CE ad EA , Quod est prius.

Iam sit BD ad DA vt CE ad EA . Dico DE esse ipsi BC parallelum. Erit enim, per antecedentem & per vndecimam Quinti, Trianguli AED ad vtrunque BED & CED , proportio vna. Itaque, per secundam partem nonæ Quinti, duo BED & CED Triangula æqualia. Quare quum eandem habeant basin DE , & ex eadem parte: erunt, per Trigessimamnonam Primi, inter duas Parallelos, Quod erat demonstrandum.

Huius etiam Theorematis rationem ab *Æquali* ductam esse satis manifestum est. Sit enim Triangulum ABC duorum laterum AB & AC æqualium, quæ secantur à linea recta DE , quæ ipsi BC sit parallelus. Et constat ex vigesimanona Primi, quatuor angulos $B, C, D, \& E$, esse æquales: vnde per quintam eiusdem, duo AD & AE latera, Trianguli AED , æqualia. Ex communi igitur Notione, DB ipsi EC æqualis. Quare AD ad DB vt AE ad EC , Quod est prius.



Iam connectantur BE & CD . Et quoniam ponitur AD ad DB vt AE ad EC : erit per antecedentem & per vndecimam Quinti, Trianguli ADE ad vtrunque BDE & CED proportio vna. Vtrunque igitur æquale, per alteram partem nonæ Quinti. Quare, per trigessimamnonam Primi, ipsa inter duas Parallelos consistunt, Quod erat ostendendum.

Vides Parallelorum officio conseruari ius *Æqualitatis*: vt in superiori, immò vt in Demonstrationibus Geometricis passim apparet.

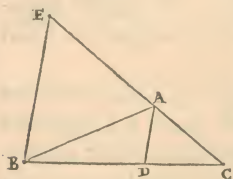
THEOREMA 3, PROPOSITIO III.

Si recta linea angulum Trianguli bifariam secans, secuerit & basin: erunt duo segmenta inter se, sicut duo reliqua Trianguli latera: Et si segmenta fuerint vt duo reliqua Trianguli latera: linea basin secans, & angulum oppositum bifariam secabit.

Sit

Sit Triangulum ABC , cuius angulum A diuidat linea AD bifariam. Dico BD ad DC esse vt AB ad AC . Et si BD ad DC vt AB ad AC : angulum bifariam esse diuisum.

Ducam BE æquidistantem DA : Et protraham CA donec concurrat cum BE ad punctum E . Et erit, per priorem partem vigesimænonæ Primi, angulus EBA æqualis angulo BAD . Et, per alteram partem eiusdem, angulus E æqualis angulo DAC . Quapropter, ex animi Notione, angulus E æqualis angulo ABE . Itaque, per sextam Primi, AB & AE æquales. Ob idq; , per priorem partem septimæ Quinti, erit EA ad AC vt AB ad AC . At, per antecedentem, EA ad AC vt BD ad DC . Quapropter AB ad AC vt BD ad DC , Quod est prius.



Sit iam, manente eadem constructione, AB ad AC vt BD ad DC . Et quia, per antecedentem, EA ad AC est vt BD ad DC : erit EA ad AC , vt AB ad AC . Itaque, per priorem partem nonæ Quinti, EA & AB sunt æquales. Quapropter, per quintam Primi, duo anguli E & EBA æquales. Quare, per vigesimamnonam Primi & animi Notionem, angulus BAD æqualis est angulo CAD , Quod fuit probandum.

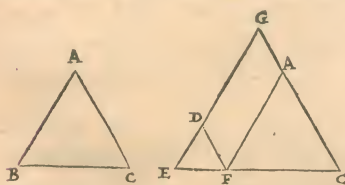
Est autem hæc constructio dimidia pars illius Figuræ Gnomonicæ quam in Quadragesimatertia Primi ad omnes Demonstrationes Geometricas locupletissimam esse diximus: quæq; omnibus ferè huius libri Sexti Propositionibus accommodatur, vt posteriùs cognoscant qui compositiones Figurarum diligenter attenderint.

THEOREMA 4, PROPOSITIO IIII.

Æquiangulorum Triangulorum, latera quæ circū æquales angulos, sunt proportionalia.

Sint Triangula ABC & DEF æquiangula: sitq; angulus A , æqualis angulo D : & angulus B , angulo E : & angulus C , angulo F . Dico esse DE ad AB & DF ad AC , sicut EF ad BC .

Producam vnum laterum alterutrius Trianguli, vt latus EF : & faciam FC æqualem BC . Tum à puncto F ducam FA æquidistantem ED , & æqualem ipsi AB : Et connectam AC . Eritq; Triangulum AFC æquale & æquilaterum Triangulo ABC , per quartam Primi: propterea quod angulus AFC æqualis est angulo E , per vigesimamnonam eiusdem, & duo latera AF & FC posita sunt æqualia duobus AB & BC . Ob id, angulus FAC æqualis angulo BAC : ob idq; , angulo D .



Reliquus igitur efd , reliquo e æqualis. Itaq; , per priorē partem vigesimæoctauæ eiusdem, AC & DF Paralleli. Productis igitur CA & ED , compleo Parallelogrammum FG . Et erit, per trigesimamquartā Primi, AG æqualis DF : & DG æqualis AF . Quoniam ergo, per secundam huius, GA ad AC sicut EF ad FC : & per eandē, EF ad FC

sicut ED ad DG : erit, per septimam Quinti, DF (quia æqualis GA) ad AC : ac, per eandē, ED ad FA (æqualem ipsi DG) sicut EF ad FC , Quod fuit demonstrandum.

ALITER, vt Theon. Eadem constructione, erit per secundam huius, vt ED ad DG (ac propterea per vndecimam Quinti, vt ED ad FA) sic EF ad FC . Et permutatim igitur, per decimam sextam Quinti, vt ED ad EF , sic FA ad FC . Rursum, per eandem huius, vt EF ad FC , ita GA (ac propterea, ita DF) ad AC : Et permutatim vt EF ad DF , ita FC ad AC . Sed probatum est vt ED ad EF , sic FA ad AC . Ex æquali igitur, per vigesimam secundam Quinti, vt ED ad DF , ita FA ad AC . Quare Triangulorum æquiangulorum latera proportionalia, Quod erat demonstrandum.

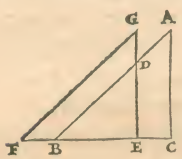
n

Q V V M

Q V V M autem hoc Theorema sit vſitatiffimum, neque ferè vllum in Dimenſionibus occurrat frequentius: triplicem Triangulorum *Æquiangularum* conſtitutionem exponendam eſſe duximus: quarum primam iam tradidimus, ex veterum præſcripto: ſcilicet, quum Triangula ſuper eandem lineam rectam conſtruuntur: qualia hoc loco *EDF* & *FAC*, ſuper lineam *EC*: niſi quòd compositionem aliquantùm variauiſmus: ſchemate tamen eodem retento. Altera igitur oſtenſionis ratio erit ex Triangulis *Æquiangularis*, quæ aliud in aliud inferuntur.

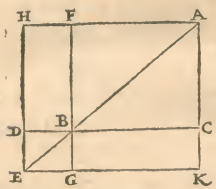
Sint duo Triangula *ABC* & *D BE*, *æquiangulara*: vt angulus *A* ſit *æqualis* angulo *D*: & angulus *B* vnus, *æqualis* angulo *B* alterius: angulusq; *C*, angulo *E*. Dico eſſe *BD* ad *BA* & *BE* ad *BC*, vt *DE* ad *AC*.

Quoniam enim angulus *D* *æqualis* eſt angulo *A*: erunt, per vigefimooctauam Primi, *AC* & *DE* paralleli. Protraho *CB* ad punctum *F*: & pono *EF* *æqualem* *CB*: Itidem protraho *ED* ad punctum *G*: & pono *EG* *æqualem* *CA*: & conne-



cto *FG*. Et quia angulus *GEF* *æqualis* eſt angulo *C*: & duo latera *EF* & *EG*, ſunt *æqualia* duobus *CB* & *CA*: erit Triangulum *GEF*, Triangulo *ABC* *æquale* & *æquilaterum*, per quartam Primi: & per vigefimooctauam eiusdem, *FG* ipſi *BA* parallelus. Sic itaque argumentationem inſtituemus. Quoniam *DE* ipſi *AC* eſt parallelus: erit, per ſecundam huius, *AD* ad *DB* vt *CE* ad *EB*: Quapropter coniunctim, per decimaoctauam Quinti, vt *AB* ad *DB*, ſic *CB* ad *EB*. Similiratione, quia *BD* ipſi *FG* eſt parallelus: erit, per ſecundam huius, *FB* ad *BE* vt *GD* ad *DE*: Ergo coniunctim, *FE* (ac propterea, *BC*) ad *BE*, ſicut *GE* (ac propterea, ſicut *AC*) ad *DE*. At probatum eſt vt *AB* ad *DB*, ſic *CB* ad *EB*. Quare, per vndecimam Quinti, vt *AB* ad *DB* & *CB* ad *EB*, ita *AC* ad *DE*, Quod erat demonſtrandum. Atque ea eſt altera Triangulorum *Æquiangularum* compoſitio.

Tertia verò eſt ad decuſſationem inter duas parallelos: qualia ſunt in ſubiecta Figura Gnomonica, duo Triangula *ABC* & *BDE*: quorum duæ baſes *AC* & *DE* ſunt paralleli: atque inter has, duæ lineæ *AE* & *CD*, ſe decuſſantes in puncto *B*, ac duo ipſa Triangula *ABC* & *BDE* cum ipſis parallelis, conſtituentes. Figuram autem Gnomonicam compleuiſmus, vt ſecunditatem ipſius vbique obuam oſtenderemus. Habes enim vno intuitu triplicem poſitionem Triangulorum *Æquiangularum*. Scilicet in dimidio Parallelogrammo, duorum Triangulorum *ABC* & *BEG*,



ſuper *AE* Dimetiente: ac tantundem in altera medietate Parallelogrammi. Quæ poſitio ad primam demonſtrationem pertinet. Alteram duorum Triangulorum *AEK* & *BEG*, etiam *æquiangularum*: quorum minus intra maius inſitum eſt: ſicut & *BED* in *AEH*. Quod in ſecunda formula exhibuiſmus.

Tertiam habes poſitionē duorum *ABC* & *BDE*, itidemq; *ABF* & *BEG*. Quorum probatio ſatis manifeſta eſt, ex ijs quæ iam antè tradidimus.

ATQVE hîc etiam ſi diligenter animaduuerteris, comperies ex Triangulorum probatione, Parallelogrammorum probationem conſequi: quum conſtiterit ſicut *AC* ad *CB*, ita *BG* ad *GE*. Sed hæc iam pluribus verbis non indigent.

Quarta erat Triangulorum *Æquiangularū* poſitio circa eandem Dimetientem: qualia ſunt *ABC* & *ABF*: item *BEG* & *BED*. Quæ quia ſunt *æqualia*, demonſtrationem non requirunt, ſed ad aliorum probationem accommodantur.

THEOREMA 5, PROPOSITIO V.

Triangula proportionalium laterum, *æquales* habent angulos ſub quibus latera proportionalia ſubtenduntur.

Hæc

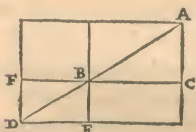
Hæc est Conuerſa antecedentis. Sint duo Triangula ABC & DEF : ſitq; AB ad DE , & AC ad DF , vt BC ad EF . Dico angulum A eſſe æqualem angulo D : & angulum B , angulo E : & angulum C , angulo F .

Super lineam EF , ex aduerſa parte Trianguli DEF , conſtituam, per vigefimamtertiam Primi, angulum FEG æqualem angulo B : & angulum EFG æqualem angulo C . Eruntq; duo conſtituti, minores duobus rectis, quia æquales minoribus duobus rectis, per decimamſeptimam Primi. Concurrent igitur EG & FG , vt ad punctum G . Eritq; angulus G , per trigefimamſecundam Primi, æqualis angulo A . Itaque, per antecedentem, AB ad EG & AC ad FG , vt BC ad EF :

ob idq;, AB ad DE ſicut ad EG : & AC ad DF ſicut ad FG , per vndecimam Quinti. Igitur, per alteram partem nonæ cuiusdem, erit DE æqualis EG : & DF æqualis FG . Quapropter, ex octaua Primi, duo Triangula DEF & GEF ſunt æquiangula. Quum igitur Triangulum GEF ſit æquiangulum Triangulo ABC : erit & DEF eidem ABC æquiangulum, Quod erat demonſtrandum.

Sed & hæc probatio ex Figura Gnomonica elicitur. Sint enim duo Triangula ABC & DBE : ſitq; AB ad AC , vt BD ad BE : & AB ad BC , vt BD ad ED . Dico angulos proportionalibus lateribus contentos, eſſe æquales.

Ponam latus AB vnius, in directum lateris BD alterius: vt ſint ABC & BDE Triangula, ſuper lineam vnā AD . Et ducam DF parallelum ipſi CA , quæ concurrat cum CB protracto ad punctum F . Quia ergo, per decimamquintā Primi, angulus DBF æqualis eſt angulo ABC : & per vigefimamnonam cuiusdem, angulus BDF , angulo BAC : erunt per trigefimamſecundam cuiusdem, duo Triangula ABC & BFD , æquiangula. Itaque, per antecedentem, vt AB ad AC , ſic BD ad DF . Sed vt AB ad AC , ſic poſitum eſt BD ad BE . Eſt igitur, per nonam Quinti, DF ipſi EB æqualis. Rurſus per antecedentem, vt AB ad BC , ſic BD ad BF . Sed vt AB ad BC , ſic BD ad DE . Sunt igitur, per eandem Quinti, BF & ED latera æqualia. Itaque, per octauam Primi, duo BDF & BED Triangula ſunt æquiangula. Quare ABC & BDE æquiangula, Quod erat demonſtrandum.

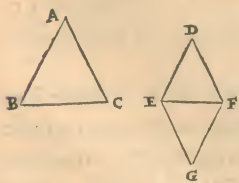


THEOREMA 6, PROPOSITIO VI.

Duo Triangula, vnum angulum vni angulo æqualem habentia, & quæ circum æquales angulos latera proportionalia: inter ſe ſunt æquiangula.

Sint duo Triangula ABC & DEF : ſitq; angulus B æqualis angulo E : & AB ad DE vt BC ad EF . Dico duo Triangula eſſe æquiangula.

Maneat vt in priori figuratone antecedentis, Triangulum EGF ex aduerſo Trianguli DEF , æquiangulum ipſi ABC . Et erit, per quartam huius, AB ad EG vt BC ad EF : ob idque, ex ipſa hypotheſi & vndecima Quinti, AB ad DE vt AB ad EG . Itaque, per ſecundam partem nonæ Quinti, DE eſt æqualis EG . Quia ergo duo latera DE & EF , Trianguli DEF , ſunt æqualia duobus EG & EF , Trianguli EGF : & angulus E vnius, æqualis angulo E alterius, quum vterq; ſit æqualis angulo B : erunt per quartam Primi, DEF & GEF æquiangula. Quum igitur EGF ſit ipſi ABC æquiangulum: erit & DEF eidem ABC æquiangulum, Quod erat demonſtrandum. Sed & idem ex Figura Gnomonica probabitur.

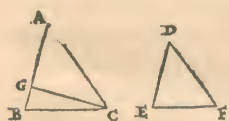


THEOREMA 7, PROPOSITIO VII.

Si duo Triangula vnum angulum vni angulo æqualem habuerint, & quæ circa duos ex reliquis angulis latera, proportionalia: reliquorum verò duorum vterque aut neuter fuerit recto minor: æquiangula erunt Triangula, & anguli proportionalibus lateribus contenti, æquales.

Sint duo Triangula ABC & DEF : sitq; angulus A æqualis angulo D , & ratio AC ad DF vt CB ad FE : & vterque duorum angulorum B & E , aut neuter sit minor recto. Dico Triangula esse æquiangula, & angulos proportionalibus lateribus contentos esse æquales.

Iam enim si angulus C fuerit æqualis angulo F , constat ipsa esse æquiangula, ex antecedente. Si verò inæquales fuerint, sit maior C : & ponatur angulus ACG æqualis angulo F , per vigesimamtertiam Primi. Eritq;, per trigesimalsecundam eiusdem, Triangulum ACG , Triangulo DEF æquiangulum. Itaque, per quartam huius, AC ad DF vt GC ad EF . Sed sic fuit BC ad EF . Igitur, per nonam Quinti GC & BC sunt æquales: ob idq;, per quintam Primi, angulus B , æqualis angulo BGC . Si ergo neuter duorum B & E fuerit minor recto, erunt duo anguli B & G , Trianguli BGC , non minores duobus rectis, repugnante decimasextima Primi. Sin vterque fuerit minor recto, erit angulus ACG maior recto, per decimasertiam eiusdem, ac propterea angulus E maior recto, contra hypothesin. Non ergo inæqualis est angulus ACB ipsi F angulo. Quare ABC Triangulum, ipsi DEF Triangulo æquiangulum, & anguli proportionalibus lateribus comprehensi æquales, Quod erat demonstrandum.



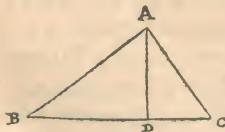
ACG maior recto, per decimasertiam eiusdem, ac propterea angulus E maior recto, contra hypothesin. Non ergo inæqualis est angulus ACB ipsi F angulo. Quare ABC Triangulum, ipsi DEF Triangulo æquiangulum, & anguli proportionalibus lateribus comprehensi æquales, Quod erat demonstrandum.

PONITVR autem vterque C & E , aut neuter minor recto: vt deducamus ad absurdum. Scilicet quum reperiantur duæ lineæ GC & BC æquales, erunt duo anguli B & CG æquales, per quintam Primi. Si ergo vterque E & B sit minor recto, erit & ACG minor recto, vtpotè ipsi E æqualis. Quare, per decimasertiam Primi, erit CG maior recto: ergo & B maior eodem: qui positus fuerat minor. Si verò neuter B & E sit minor recto, erit vterque, minimum, rectus: Quapropter & CG rectus, per quintam Primi: repugnante decimasextima eiusdem.

THEOREMA 8, PROPOSITIO VIII.

Ab angulo recto Trianguli perpendicularis ad basin demissa, Triangulum in duo Triangula secat, similia toti & inter se.

Sit Triangulum ABC , cuius angulus A rectus: sitq; AD perpendicularis ad BC basin. Dico duo Triangula ABD & ADC , toti ABC Triangulo & inter se esse similia.



sicut & angulus BAC .

Quod & nos supra ad quadagesimasextimam Primi demonstrauimus. Itaque, per quartam huius, latera æquos angulos continentia, proportionalia. Quare Triangula, toti & inter se similia, Quod fuit ostendendum.

Confect

Confectarium.

Perpendicularis à recto angulo Trianguli ad basin deducta, inter duo basis segmenta proportionalis est: Et vtrunvis laterum inter basin & segmentum sibi conterminum, proportionale.

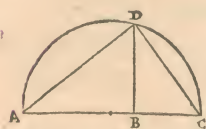
Vt AD perpendicularis, media proportionalis est inter BD & DC segmenta. Et AB latus, inter BC basin & BD segmentum: itidem AC latus, inter ipsam BC basin & DC segmentum, proportionale est.

PROBLEMA I, PROPOSITIO IX.

Thconi 13.

Inter duas lineas rectas, mediā proportionalem inuenire.

Sint duæ lineæ rectæ AB & BC , inter quas sit inuenienda media proportionalis.

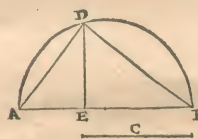


Ponam BC in continuum ipsius AB : vt sit AC linea vna. Super quam describam Semicirculum ADC . Et à puncto B , erigam BD perpendicularem. Hanc dico esse mediam inter AB & BC .

Connectantur DA & DC . Et erit, per trigessimamtertij, angulus ADC rectus. Quare, per Confectarium antecedentis, AB ad BD vt BD ad BC , Quod erat faciendum.

ALITER. Sint duæ lineæ AB & C , quarum maior AB (Nam inter æquales, media est æqualis). Volo inter ipsas constituere proportionalem.

Super AB describo Semicirculum ADB : & pono EB æqualem ipsi C . Tum ab E puncto, excito perpendicularem ED : Et connecto AD & BD . Dico BD esse mediam proportionalem inter AB & EB : hoc est, inter AB & C .



Constat quippè ex trigesima Tertij, angulum ADB esse rectum: & ex antecedente, duo Triangula AED & BED esse inter se & toti ADB similia. Quare per quartam huius, AB ad BD vt BD ad EB : ob idq; vt BD ad C , Quod erat faciendum.

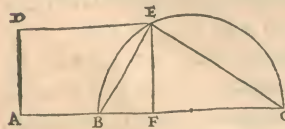
IN HAC igitur constructione, vno intuitu triplex conspicitur proportionalitas. Est enim BD media inter AB & EB , vt iam probauimus: sed & AD media inter AB & AE : Ac tertio ED media inter AE & EB segmenta.

Dato Medio proportionali, in data linea duo extrema reperire.

Oportet autem datum Medium dimidia parte data lineæ non esse maius.

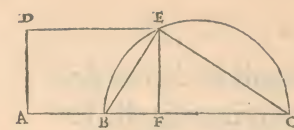
Sit datum Medium AB , data vero linea BC . Volo in BC duo extrema proportionalia reperire, inter quæ sit AB medium proportionale. Modò tamen AB non sit maius dimidia parte ipsius BC . Nam sic medium esse non posset.

Iungo AB & BC , vt AC sit linea vna. Tum super BC describo Semicirculum BEC . Et à puncto A , erigo perpendicularē AD : quam pono ipsi AB æqualem. Et per punctum D duco DE , parallelum ipsi AC : quæ omninò secabit, aut continget Semicirculum, vt in puncto E : quum AD non sit maior Semidiametro. Tum à puncto E , demitto EF



perpendicularem ipsi BC . Dico BC sic diuisam in puncto F , vt AB sit media proportionalis inter BF & FC .

n 3 Hoc



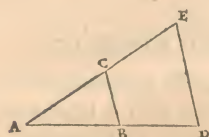
Hoc autem satis manifestum est ex ipsa trigesima Tertij & Confectario antecedentis. Nam quum FE sit æqualis AD, per trigesimam quartam Primi: ob idq; ipsi AB: ductis lineis BE & CE, fiet Triangulum BEC Rectangulum. Ob id, ex ipso Confectario, erit BF ad FE (ob idq; ad ipsam AB) ut FE ad FC, Quod fuit faciendum.

PROBLEMA 2, PROPOSITIO X.

Theoni II.

Duabus lineis propositis tertiam continuè proportionalem adiungere.

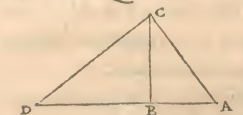
Sint duæ lineæ AB & AC, quibus sit addenda tertia continuè proportionalis.



Coniungo ipsas AC & AB ad angulum arbitrium BAC: Tum protracta AB, facio BD æqualem ipsi AC. Et connexa BC, ducō DE, parallelum ipsi BC: & protraho AC: donec concurrat cum DE ad E punctum. Dico lineam CE esse tertiam ad duas AB & AC continuè proportionalem.

Est enim, per secundam huius, AB ad BD sicut AC ad CE: Sed AB ad BD sicut AB ad AC, per alteram partem septimæ Quinti. Quare AB ad AC sicut AC ad CE, Quod erat faciendum.

ALITER. Constituo AB & BC datas, in directum. Tum super punctum A erigo AD lineam, ad angulum arbitrium: quam facio æqualem ipsi BC. Et à puncto D, per punctum B, ducō transversam DE: ad quam demitto concurrentem CE, parallelum ipsi AD. Dico CE esse tertiam proportionalem ad AB & BC. Quum enim, per decimam quintam Primi, angulus B, Trianguli ABD, sit æqualis angulo B, Trianguli CBE: & per vigesimam nonam eiusdem angulus A æqualis angulo C, & angulus D angulo E: erit, per quartam huius, AB ad DA sicut DC ad CE. Quare, per undecimam Quinti, AB ad BC sicut BC ad CE, Quod erat faciendum.



ALITER rursus. Constituo ipsas AB & BC ad angulum rectum ABC. Et connexa AC, ducō à puncto C, perpendicularem CD: quam produco donec concurrat cum AB protracta, ad punctum D. Dico BD esse tertiam proportionalem ad AB & BC. Id verò satis constat ex Confectario octavæ huius.

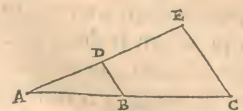
PROBLEMA 3, PROPOSITIO XI.

Theoni Problema 4, Propositio 12.

Tribus lineis propositis quartam proportionalem adiungere.

Sint tres lineæ AB, BC, & AD. Volo his tribus quartā proportionalem adiungere.

Ex AB & BC facio lineam unam AC: & statuo AD cum AC, ad angulum fortuitum CAD: & connecto DB: cui ducō parallelum CE. Tum protraho AD donec concurrat cum CE ad ipsum E punctum. Dico DE esse quartam proportionalem ad AB, BC, & AD.



Erit enim, per secundam huius, sicut AB ad BC, ita AD ad DE, Quod erat faciendum. Sed & hoc patebat ex antecedente: Modò tamen animaduertas tam Continuum quam Incontinuum proportionalitatem hic probari: quas Euclides separatim non tractat: ut in Definitionibus Quinti monuimus.

ALITER

ALITER. Sint tres lineæ AB, BC, & BD. Volo ad ipsas addere quartam proportionalem.

Coniungo AB primam cum BD tertia: ut sit AD linea vna. Ac super hanc erigo BC secundam, ad angulum fortuitum ABC: Et connecto AC. Tum per punctum D duco DE ipsi AC parallelum: quam produco donec concurrat cum CB itidem protracta ad punctum E. Dico BE esse quartam proportionalem ad ipsas AB, BC, & BD: esse scilicet ut AB ad BC, ita BD ad BE.

Quum enim ex decima quinta & vigesima nona Primi, duo Triangula ABC & DBE sint æquiangula: erit, per quartam huius, AB ad BC ut BD ad BE, Quod erat faciendum.

Hanc Campanus antecedenti Propositioni annexuit, ut Appendicem.

PROBLEMA 4, PROPOSITIO XII.

Theoni Problema 1, Propositio 9.

A data linea constitutam partem abscindere.

Sit data linea AB, à qua sit refecanda, verbi gratia, pars tertia.

Duco lineam AC, quæ cum AB faciat angulum fortuitum CAB. Et in directum AC, continuo CD & DE, ipsi AC æquales: ut sit AE in tres æquales partes diuisa, in punctis C & D. Et connecto EB. Tum à puncto C duco CF parallelum ipsi BE, secantem AB in puncto F. Dico AF esse tertiam partem lineæ AB.

Quoniam enim, per secundam huius, EC ad CA ut BF ad FA: erit coniunctim, EA ad CA ut BA ad FA. Sed AE ad CA tripla: igitur & BA ad FA tripla. Quare AF ipsius AB tertia pars, Quod erat faciendum.

SE D quoniam minutæ denominationes, quales sunt superpartientes & Superparticulares, non ita sunt expeditæ: id negotij obiter explicabimus.

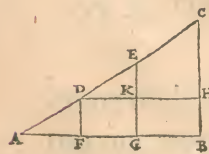
Sit linea AB, à qua refecanda sit pars subsupertripartiens quintas.

Quum Octonarius ad Quinarium sit supertripartiens quintas: ex octo lineolis æqualibus, faciam lineam vnā: cuiusmodi hoc loco est linea AC: quam coniungam ad angulum fortuitum cum ipsa AB diuidenda. Et connexa BC, per punctum quintæ sectionis, quod sit D, ducam DE parallelum ipsi BC. Eritq; AE ipsa pars quam quærimus lineæ AB, scilicet subsupertripartiens quintas. Quod delineatio ipsa satis ostendit. Nam quum AD sit ad AC subsupertripartiens quintas: sitq; ex postrema probatione, ut AD ad AC, sic AE ad AB: erit & AE ad AB subsupertripartiens quintas, Quod fuit ostendendum.

PROBLEMA 5, PROPOSITIO XIII.

Theoni Problema 2, Propositio 10.

Datam lineam non sectam, datæ lineæ sectæ similiter secare.



Sit data linea non secta, AB: secta verò sit AC, verbi gratia, in tres partes quantascunque, AD, DE, & EC. Volo lineam AB in tot similes partes diuidere.

Iungo AB & AC ad angulum pro arbitrio, BAC. Et connecto BC: Cui per puncta D & E duco parallelos DF

n 4 & EG,

& E G. Has dico diuidere lineam AB in partes similes partibus lineæ AC.

Ducam DH parallelum ipsi AB, secantem BC in puncto H: & CE in puncto K. Et sumptis duobus Triangulis ABC & DHC, erit per secundam huius, ED ad DA vt GF ad FA: similiter CE ad ED vt HK ad KD: ob idq; vt BG ad GF, per trigessimamquartam Primi, & secundam partem septimæ Quinti, Quod erat faciendum. Toties verò repetitur secunda huius, quot erunt paralleli ipsi BC: sed toties trigessimamquarta Primi & septima Quinti, quot erunt ipsi AB paralleli.

Ex HAC habetur facilis ratio diuidendæ lineæ in quascunque partes nominatas. Vt si tripartitò secanda sit: fiet DE æqualis AD: & EC æqualis eidem, per tertiam Primi. Ac tum eodem constructionis modo quo iam vsi sumus, secabitur AB in tres partes æquales.

Idem de cuiuscunque generis partibus erit iudicium.

THEOREMA 8, PROPOSITIO XIII.

Campano 13.

Aequalium Parallelogrammorum, & vnum vni æqualem angulum habentium, reciproca sunt latera quæ circum æquales sunt angulos: Et quorum Parallelogrammorum vnum vni æqualem angulum habentium, reciproca sunt latera quæ circum æquales angulos, ea sunt æqualia.

Sint duo Parallelogramma ABCD & CEF G, æqualia: sitq; angulus C vnus, æqualis angulo C alterius. Dico esse BC ad CG vt EC ad CD. Et si fuerit BC ad CG vt EC ad CD, fuerintq; ij duo comprehensi anguli æquales: Dico duo Parallelogramma esse æqualia.

Ponam duo latera BC & CG in directum, vt sit BC linea vna. Eritq; ED item linea vna, per ea quæ demonstrauius ad decimamquintam Primi. Produco itaque AD & FG latera donec concurrant ad punctum H. Et erit, per priorem partem septimæ Quinti, vtriusque Parallelogrammi AC & CF ad Parallelogrammum CH, ratio eadem. Et quia per primam huius, Parallelogrammum AC ad Parallelogrammum CH est vt BC basis ad CG basin: & Parallelogrammum CF ad idem CH, vt EC basis ad CD basin: erit, per vndecimam Quinti, BC ad CG vt EC ad CD, Quod est prius.

Est o iam BC ad CG vt EC ad CD. Et erit, per primam huius, BC basis ad CG basin, vt AC Parallelogrammum ad CH Parallelogrammum: Et EC basis ad CD basin, vt CF Parallelogrammum ad idem CH Parallelogrammum. Itaque, per vndecimam Quinti, AC ad CH vt CF ad idem CH. Quare, per priorem partem nonæ eiusdem, Parallelogrammum AC, Parallelogrammo CF est æquale, Quod fuit demonstrandum.

THEOREMA 10, PROPOSITIO XV.

Campano 14.

Aequalium Triangulorum, & vnum vni æqualem angulum habentium, reciproca sunt latera quæ circum

æquales

æquales angulos: Et quorum Triangulorum vnum
vni æqualem angulum habentium reciproca sunt la-
tera quæ circum æquales sunt angulos, ea sunt æqualia.

Sint duo Triangula æqualia ABC & BDE : sitq; angulus B vnus, æqualis an-
gulo B alterius. Dico AB ad BE esse vt DB ad BC : Et si fuerit AB ad BE vt DB
ad BC , fuerintq; duo anguli qui ad E , æquales, Triangula esse æqualia.

Iungam duo latera AB & BE , vt sit AE linea vna. Et erit DC linea vna,
eadem ratione qua in antecedente: scilicet, per Conuersam Decimæquintæ Primi.
Et connectam CE . Eritq;, per priorem partem septimæ Quinti, vtriusque Trian-
guli ABC & BDE , ad Triangulum CBE ratio eadem, & quia, per primam huius, est
 ABC ad BEC vt AB ad BE : & BDE ad idem BEC vt DB ad BC : erit, per vn-
decimam Quinti AB ad BE vt DB ad BC , Quod est prius.

Est o iam AB ad BE vt DB ad BC , sitq; duo anguli qui ad B , æquales. Et
erit, per primam huius, AB ad BE vt ABC ad BEC :
& DB ad BE vt DEB ad idem BEC . Est igitur, per
vndecimam Quinti, vtriusque ABC & DEB ad BEC ,
ratio eadem. Quare, per priorem partem nonæ eius-
dem, ipsa ABC & DEB sunt æqualia, Quod fuit de-
monstrandum.

Hæc figuratio, si intelligatur connexa AD , erit Quadrilatera cum duabus
Dimetiētib. Sed non oportuit esse æquidistantium laterum, quum de solis
Triangulis ageretur: neque ijs æquiangulis. Nam sic essent AC & DE paralleli.

Cæterum hæc mutuorum laterum in Triangulis comparatio, sic colligitur: vt
sit AB superior, ad suam directam BE , sicut DB itidem superior, ad suam directam
 BC . Nam si diceretur AB superior, ad BE , vt CB inferior, ad BD : non responde-
rent singula singulis: neque esset mutua comparatio. Idem intelligo de permutatio-
ne aut conuersione.

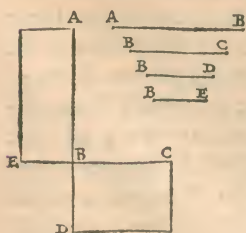
Atque hoc notabile est ad reciprocationis cognitionem. Hoc igitur totum ex
duabus Dimetiētib. Quadrilateri se decussantibus pendet.

THEOREMA II, PROPOSITIO XVI.

Campano 15.

Si quatuor lineæ proportionales fuerint, quod sub extre-
mis continetur Rectangulum, æquale est ei quod sub
mediis: Et si sub extremis comprehensum Rectan-
gulum æquale fuerit ei quod sub mediis, quatuor li-
neæ proportionales erunt.

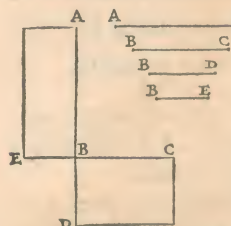
Sint quatuor lineæ AB , BC , BD , & BE proportionales, vt AB ad BC , ita BD
ad BE . Dico Rectangulum comprehensum sub AB & BE ,
esse æquale Rectangulo comprehenso sub BC & BD : &
si Rectangulum comprehensum sub AB & EB , sit æquale
Rectangulo quod sub BC & BD : dico & esse AB ad BC
vt BD ad BE .



Fiat Rectangulum AE ex AB & BE : Rectangulum
quoque CD , ex BC & BD . Et statuantur ad angulos con-
tra se positos, qui ad B : vt clarius sit, totum ex Figura Gno-
monica pendere.

Quum itaque sit AB ad BC vt BD ad BE : erit permutatim, AB ad BD vt BC
ad

ad BE . Quapropter, in quocunque sint situ Rectangula, quum sint anguli vndiqueque æquales, erunt latera reciproce proportionalia. Quare, per secundam partem decimæ quartæ huius, Parallelogramma æqualia, Quod est prius.

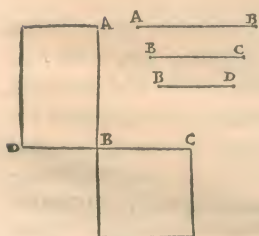


Secundum patet ex priori parte eiusdem. Si enim sint Parallelogramma æqualia: quum omnes anguli sint æquales, latera erunt reciproca. Quare in hoc situ AD lineæ vnius, erit AB ad BD vt BC ad BE : hoc est, permutatim, AB ad BC vt BD ad BE , Quod erat demonstrandum.

THEOREMA 12, PROPOSITIO XVII.

Campano 16.

Si tres lineæ proportionales fuerint: quod sub extremis continetur Rectangulum, æquale est ei quod à media fit Quadrato: Et si sub extremis comprehensum Rectangulum, æquale fuerit ei quod à media fit Quadrato: ipsæ tres lineæ proportionales erunt.



Sit lineæ AB ad lineam BC , vt eadem BC ad tertiam BD . Dico Rectangulum comprehensum sub AB & BD esse æquale Quadrato quod ex BC . Et si Rectangulum comprehensum sub AB & BD sit æquale Quadrato BC : esse AB ad BC vt BC ad BD .

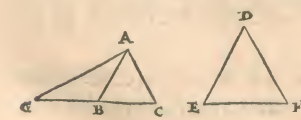
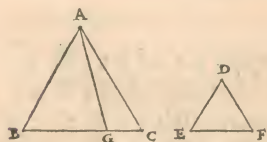
Hoc autem satis manifestum est ex antecedente. Nam lineæ BC , hoc loco est pro secunda & tertia: BD autem quarta. Hoc igitur Theorema superiori connecti poterat, vt Confectarium.

THEOREMA 13, PROPOSITIO XVIII.

Theoni 19.

Similia Triangula duplā inter se habent rationem, quā similis rationis latera.

Sint duo Triangula, ABC & DEF , similia: hoc est, per primam Definitionem huius, æquiangula, & laterum proportionalium: Et sit angulus A æqualis angulo D : angulus B , angulo E : & angulus C , angulo F : sitq; AB ad DE & AC ad DF vt BC ad EF . Dico duplam esse rationem Trianguli ABC ad Triangulum DEF , quā BC ad EF .



Duabus enim lineis BC & EF addo tertiam CG , per decimam huius, continuè proportionalem: resecta BC , aut eadem protracta, vt maior aut minor fuerit quā EF (cuiusmodi hic dupliciter figurauius). Et connecto GA . Eritq; per alteram partem decimæ quintæ huius, Triangulum AGC , æquale Triangulo DEF : quum sit AC positum ad DF vt EF ad GC , & sit angulus C , angulo F æqualis. Itaque, per secundam partem septimæ Quinti, erit Trianguli ABC ad vtrunque ipsorum AGC & DEF , ratio eadem. Atqui Triangulum BAC , per primam huius, ad Triangulum AGC , est vt BC ad GC : sed BC ad GC ratio, est vt BC ad EF duplicata, per decimam Definitionem Quinti. Quare Trianguli

ABC

ABC ad Triangulum DEF ratio, est vt BC ad DF duplicata, Quod erat demonstrandum.

Iam verò si CG sit æqualis BC, erit, per alteram partem decimæquintæ huius, Triangulum ABC æquale Triangulo DEF. Æqualis autem proportio, quocunque modo multiplicetur, manet eadem: quum ab vnitare denominationem summat, quæ ipsa sui est Quadrum, Cubus: ac in vniuersum in se ducta, semper sibi æqualis.

THEOREMA 14, PROPOSITIO XIX.

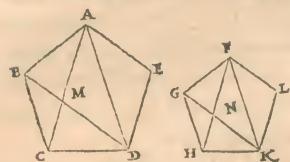
Theoni 20, Campano 18.

Similia Polygona, in similia totidemq; numero Triangula diuiduntur. Et Polygonum ad simile Polygonum duplam habet rationem, quàm latus ad similis rationis latus.

Sint Polygona similia, ac in præsens Pentagona, ABCDE & FGHL. Hæc dico diuidi in Triangula inter se similia, & numero æqualia: Atque insuper, esse vtrunque illorum ad alterum, vt proportio lateris AB ad FG latus simile duplicata.

Connectantur AC & AD: itidem FH & FK. Eritq; propter similitudinem Polygonorum & per sextam huius, Triangulum ABC, Triangulo FGH æquiangulum: & Triangulum AED, Triangulo FLK. Ob id, quum Pentagona sint exposita, æquiangula & laterum proportionalia: erit & Triangulum ACD, Triangulo FHK æquiangulum. Sicq; vtrunque alteri simile, per quartam huius & definitionem Similium Superficierum. Quare quum æqualia sint numero, patet prior pars.

Altera autem sic. Ducatur BD, quæ secet AC in puncto M: & GK, quæ secet FH in puncto N. Eritq; propter similitudinem Polygonorum & per sextam huius, Triangulum BCD, Triangulo GHL æquiangulum: vnde & Triangulum ABM Triangulo FGN æquiangulum: Æquales enim sunt anguli BAM & GEN, & ab æqualibus auferuntur ABM & FGN: ob id, per trigessimam secundam Primi, æquiangula. Eadem ratione AMD ipsi FNK æquiangulum:



Quapropter ex quarta huius, BM ad GN vt AM ad FN: itidem AM ad FN vt MD ad NK. Igitur, per vndecimam Quinti, BM ad GN vt MD ad NK: & permutatim, BM ad MD vt GN ad NK. Sed, per primam huius, ABM ad AMD, & BCM ad CMD, vt BM ad MD: & per eandem, FGN ad FNK, & GNL ad HNK, vt GN ad NK. Itaque ex decimatertia Quinti, ABC ad ACD vt FGH ad FHK: & permutatim, ABC ad FGH vt ACD ad FHK. Eadem ratione si intellexerimus ductas EC & LH, probabitur sic esse ACD ad FLK. Quare per decimatertiam Quinti, erit totius Pentagoni ratio ad totum Pentagonum, vt ABC ad FGH: ob idq; per antecedentem, vt AB ad FG duplicata, Quod erat demonstrandum.

SED hoc posterius caput in communi notione est. Nam quum Triangula in quæ resoluuntur Pentagona, sint æqualia numero, & inter se similia: erit per antecedentem, ratio ABC ad FGH vt BC ad GH duplicata: & AED ad FLK vt DE ad KL duplicata. Atqui eæ omnes duplicatæ rationes sunt æquales, quum earum simplices sint æquales, erit igitur, per decimatertiam Quinti, ratio totius Pentagoni ad totum Pentagonum, vt vnius laterum ad suum simile, duplicata, Quod erat probandum.

Confect

Confectarium.

Si igitur tres lineæ proportionales fuerint: quanta est prima ad tertiam, tanta erit Superficies quæ super primam, ad Superficiem quæ super secundam: quum vtraque fuerit similis & similiter descripta.

Quod ex iam ascripta deductione manifestum euadit.

HVIC etiam Theoremati quidam aliud subiiciunt Confectarium de Parallelogrammis Similibus, quòd in dupla sint ratione, quàm ipsorum latera similiter sumpta: Sed hoc patet vel ex Triangulorum similitudine. Triangula enim, vt iam non semel monuimus, dimidia sunt Quadrilaterorum. Immo & Theorema si de Rectilineis pronuntiaffet, vniuersam peræquè habuisset probationem, atque de Polygonis.

PROBLEMA 6, PROPOSITIO XX.

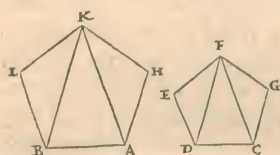
Theoni 19, Campano 18.

Super data linea, datæ Superficie rectilineæ similem Superficiem similiterq; positam describere.

Sit data linea AB, data verò Superficies in præsens Pentagona, CDEFG. Volo super AB constituere Superficiem ipsi CDEFG similem & similiter positam.

Resoluo datam Superficiem in Triangula, ductis lineis DF & DG. Tum super puncto A, constituo angulum BAH, æqualem angulo c. Itidem super puncto B, constituo angulum ABH, æqualem angulo CDG: ducta BH, quæ concurrat cum AH ad punctum H.

Et erit, per trigessimamsecundam Primi, angulus AHB æqualis angulo CDG: ob id, per quartam huius, latera duorum Triangulorum GCD & HAB, proportionalia. Pono etiam angulum HBK, æqualem angulo GDF: & angulum BHK, angulo DGF: angulum verò KBL, angulo FDE: ac demum angulum BKL, æqualem angulo DFE. Actum erit completum Pentagonum super linea AB, quale querimus. Est enim in Triangula æqualia numero & æquiangula diuisum, vt Pentagonum CDEFG. Quare eidem simile, Quod erat faciendum.



VT autem hoc loco obiter explicemus quid similiter positum dicatur in Superficiebus: id est, si occurrat Superficies, cuiusmodi est hoc loco, Pentagonum CDEFG, cui super linea AB sit constituenda Superficies similis & similiter descripta, vt attendamus an ipsa AB comparetur lateri DC an lateri DE, an breuiter cuiuspiam laterum Figuræ oblatæ: eamque lineam comparationi accommodemus. Posset enim fieri angulus BAH æqualis angulo CDE, atque eo instituto perfici Figura: quæ vt similis euaderet, non tamen similiter esset descripta. Quod satis manifestum est, quum Figura quæ proponitur, non est æqualium laterum.

THEOREMA 15, PROPOSITIO XXI.

Campano 20.

Quæ eidem Rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia.

Sint duo Rectilinea ABC & DEF: sitq; vtrunq; illorum simile Triangulo GHK: vt sit

vt sit AB ad AC , & DE ad DF , sicut BC & EF ad HK : & anguli vtriusque proportionalibus lateribus contenti, æquales sint angulis Trianguli $G HK$. Dico ambo esse similia.



Nam, per vndecimam Quinti, erit AB ad AC & DE ad DF vt BC ad EF : ob idq; per quintam huius, erunt anguli sub quibus latera proportionalia subtenduntur, æquales. Ambo igitur æquiangula: Quare, à definitione Similium Superficierum, inter se similia, Quod fuit demonstrandum.

Hoc Theorema per se fuit manifestum, velut animi Notio. Nam, vt antea docuimus, Similitudo Superficierum est æqualitas quædam.

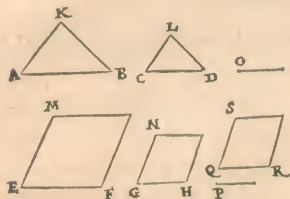
THEOREMA 16, PROPOSITIO XXII.

Theoni 21.

Si quatuor lineæ fuerint proportionales: erunt & ab eis Rectilinea similia similiterq; posita, proportionalia: Et si ab eis Rectilinea similia similiterq; posita, fuerint proportionalia: erunt & ipsæ proportionales.

Sint quatuor lineæ proportionales, AB , CD , EF & GH : vt AB ad CD , sic EF ad GH : sintq; ab ipsis AB & CD , similia similiterq; descripta Rectilinea, quæ sint Triangula, ABK & CDL : Ab ipsis verò EF & GH , similia similiterq; descripta, Parallelogramma MF & NH . Dico esse vt Triangulum ABK ad Triangulum CDL , ita Parallelogrammum MF ad Parallelogrammum NH .

Ponatur ad ipsas AB & CD , per decimam huius, tertia proportionalis O : ad ipsas quoque EF & GH , tertia proportionalis P . Et quoniam vt AB ad CD , sic EF ad GH : sed & vt CD ad O , sic GH ad P : ex æquali igitur, per vigesimanisecundam Quinti, vt AB ad O , sic EF ad P . Sed vt AB ad O , sic Triangulum ABK ad Triangulum CDL , per Confectarium decimænonæ huius: Et per idem ipsum, vt EF ad P , ita Parallelogrammum MF ad Parallelogrammum NH . Vt igitur, per vndecimam Quinti, ABK Triangulum ad CDL Triangulum, ita MF Parallelogrammum ad NH Parallelogrammum, Quod est prius.



Sint verò duo Triangula ABK & CDL similia & similiter posita: duoq; Parallelogramma MF & NH , eiusmodi. Dico esse AB ad CD vt EF ad GH .

Ponatur, per duodecimam huius, vt AB lineæ ad CD lineam, ita EF ad QR : & per vigesimam huiusce, describatur super QR , Parallelogrammum QRS , vtrique ipsorum MF & NH simile similiterq; positum. Et erit, per priorem partem huius, vt ABK Triangulum, ad CDL Triangulum, sic MF Parallelogrammum, ad SR Parallelogrammum. Sed sic fuit MF ad NH . Igitur per secundam partem nonæ Quinti, Parallelogrammum SR æquale est Parallelogrammo NH . Et quia sunt similia & similiter posita, æqualis erit lineæ GH , lineæ QR , per secundam partem decimænonæ huius. Nam quum sit ratio NH Parallelogrammi ad SR Parallelogrammum, dupla quàm GH lineæ ad QR lineam, eaq; æqualis: ipsa non nisi ex æquali produci potest. Quare vt AB ad CD , ita EF ad GH , Quod fuit demonstrandum.

o THEO

THEOREMA 17, PROPOSITIO XXIII.

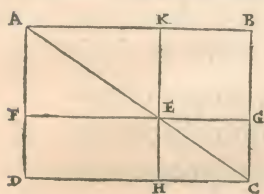
Campano 22, Theoni 24.

In omni Parallelogrammo, quæ circa Dimetientem Parallelogramma, similia sunt toti, & inter se.

In Parallelogrammo $ABCD$, sint duo Complementa GH & FK , circa Dimetientem AC . Hæc dico esse toti BD & inter se similia.

Est enim, per secundam huius, BC ad CG , & DC ad CH , ut AE ad EC : ob id, coniunctim, BC ad CG & DC ad CH , ut AC ad CE . Quapropter, ex vndecima Quinti, BC ad CG ut DC ad CH , igitur & ut AB ad EG : quum AB sit æqualis DC , & EG æqualis HC .

Eadem argumentatione erit AD ad EH , ut AB ad EG , & ut DC ad HC :



Quia ergo Parallelogramma sunt æquiangula, erit per definitionem Similium Superficierum, GH simile toti BD . Haud dissimili ratione probabitur FK eidem BD toti simile: quum sit BA ad AK & DA ad AF , ut CA ad AE , per secundam huius & Coniunctam proportionalitatem. Quapropter ex vigesima huius, erit & FK simile GH . Sicq; constat propositio.

Sed & hoc constabat ex Triangulis: ex ijs scilicet quæ probauimus ad quartam huius. Quum enim duo Triangula ABC & EGC sint æquiangula, & laterum ad æquos angulos proportionalium: erit AB ad BC ut EG ad EC . Rursus quum ADC & EHG sint similia: erit AD ad DC ut EH ad HC . Quod & eodem argumento probabitur de duobus Triangulis AEF & AEK , ipsum FK Parallelogrammum complementibus. Sunt igitur FK & HC Parallelogramma, toti BD Parallelogrammo & inter se similia, Quod erat demonstrandum.

Ab hoc Theoremate non incommodè locum sibi inueniet hoc Problema, quauis id ipsum iam antè proponi potuisset.

Propositis duobus Parallelogrammis æquiangulis, sed non similibus, ab vno illorum, Parallelogrammum alteri simile refecare.

Sint duo Parallelogramma $ABCD$ & $CEFG$, æquiangula quidem, sed dissimilia. Volo ab ipso $ABCD$ refecare portionem Similem ipsi $CEFG$.

Sit ergo angulus C vnus, æqualis angulo C alterius: Sicq; statuantur duo Parallelogramma, ut BC sit linea vna, & DE altera. Tum ducatur transversa FCH , secans AD in puncto H : Et ducatur HK parallelus ipsi CD . Dico $CDHK$ Parallelogrammum, ex AC Parallelogrammo refectum, esse simile ipsi EG Parallelogrammo.

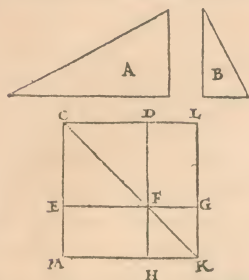
Id verò satis constat ex hac vigesimatertia: quum ambo sint circa eandem Dimetientem. Atque ad clariorem notionem, perfeci $ABGL$ Parallelogrammum. Hic etiam sibi locum inueniet hoc Problema,

Inter duas Superficies rectilineas mediam Superficiẽ proportionalem inuenire.

Sint duæ Superficies rectilineæ A & B , inter quas sit collocanda media Superficies proportionalis.

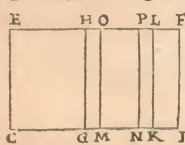
Reduco ipsas ad duo Parallelogramma Similia, secundum doctrinam decimæ-octauæ huius: (vel, si placet, vtranque ad Quadratum, ex vltima Secundi). Et sint duo Parallelogramma $CDEF$ & $FGHK$, similia inter se, & duabus Superficiebus A & B mutuò equalia. Tum pono angulos qui ad F sunt æquales, alterum ex aduerso alt

fo alterius: vt sint duo Parallelogramma ED & HG circa eandem Diametrum CK .



vt HG Superficies ad FL Superficiem, sic eadem FL Superficies ad ED Superficiem, Quod fuit faciendum.

ALITER expeditius. Inter duas parallelas interminatas CD & EF , constituo Parallelogrammum $CGEH$, verbi gratia, Rectangulum: & insuper, æquale Rectilineo A : per ea quæ docuimus ad quadagesimam quartam Primi, ac eodem præcepto, inter ipsas parallelas constituo alterum Parallelogrammum $KDLF$, æquiangulum ipsi CH Parallelogrammo, & æquale ipsi B Rectilineo. Iam in linea



EF , inter ipsas CH & LD bases, pono lineam MN media ratione proportionalem, per nonam huius. Ductisq; MO & NP parallelis ipsis CH & DF , constituo Superficiem equidistantium laterum, MP . Hanc dico esse media ratione proportionalem inter duo CH & KF : ac propterea inter A & B Rectilinea.

Est enim, per primam huius, vt CG basis ad MN basin, sic CH Parallelogrammum ad MP : Et per eandem, vt MN basis ad KD basin, sic MP ad KF . Quare, per vndecimam Quinti, vt CH ad MP , sic MP ad KF , Quod fuit probandum.

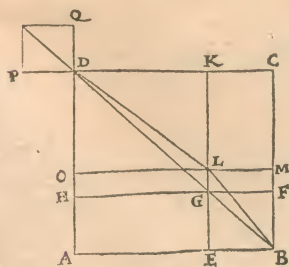
Sed nos priorem demonstrationem astruximus, ad illustrandam vbique Figuram nostram Gnomonicam.

THEOREMA 28, PROPOSITIO XXIII.

Campano 23, Theoni 26.

Si duo Parallelogramma similia & similiter posita, communem angulum habuerint, aut angulum æqualem angulo æquali contrà positum habuerint: ambo circa eandem Dimetientem consistunt.

Sint duo Parallelogramma similia & similiter posita, $ABCD$ & $EBFG$, communem habentia angulum qui ad B . Hæc dico esse circa vnā Dimetientem. Sint & duo Parallelogramma EF & HK similia similiterq; posita: sitq; angulus G vnius, æqualis angulo G alterius: & vterque alteri contrā positus. Dico etiamnum duo EF & HK Parallelogramma circa vnā Dimetientem consistere.

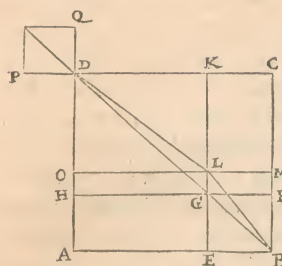


Prius sic probatur. Connectam BG & GD : quæ si vnica linea fuerit, patet Propositio. Sin minus, sit BLD Dimetiens: & ducatur MLO , parallelus ipsi EB , quæ secet BC & AD in punctis M & O .

Et erit, per antecedentem, Parallelogrammum EM simile toti AC : quapropter erit CB ad MB vt AB ad EB . At, ex hypothese, CB ad FB vt AB ad EB . Igitur, per vndecimam Quinti, CB ad FB vt CB ad MB . Quare, per secundam partem nonæ eiusdem, FB æqualis MB , pars toti, Quod minimè conuenit.

o 2 Secun

Secundum sic. Educta, ut modò, Dimetiente per L punctum, erit per antecedentem, MB ad EB ut KL ad LO (hoc est, ut KL ad GH). At ex hypothesi, FB ad EB ut KG ad GH . Quare per ipsam vndecimam Quinti, erit FB æqualis MB : & præterea KL ipsi KG : contra commune Sensum.



ALITER compendiosius. Parallelogrammum EM simile est toti AC , per antecedentem: quapropter & minori EF , per vigesimam primam huius & hypothesin: sicq; latera proportionalia: Eritq; LM ad MB ut GF ad FB . Quum igitur GF sit ipsi LM æqualis: erit, per septimam Quinti, GF ad MB ut GF ad FB . Quare FB ipsi MB æqualis, pars toti, Quod est absurdum.

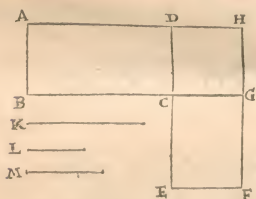
HUIUS Propositionis sententiam idèd ampliari, ut etiam de Parallelogrammis cõnexis intelligeretur: qualia in constructione apparent AC & PQ . Dimetiens enim infinitè produci potest, & Parallelogramma similia circumscribi. Breuiter, ut hæc omni ex parte Conuerfa esset antecedentis.

THEOREMA 19, PROPOSITIO XXV.

Theoni 23, Campano 24.

Aequiangula Parallelogramma, rationem habent compositam ex alternorum laterum ratione.

Sint duo Parallelogramma, $ABCD$ & $CEFG$ æquiangula, & sit angulus C vnus, æqualis angulo C alterius. Dico rationem vnus ad alterum, compositam ex ratione quæ est BC ad CG , & quæ DC ad CE .



Ponam ambo Parallelogramma ex aduerso, ut BC sit linea vna, & DE itidem vna: & perficiam Parallelogrammum $ABGH$. Ponam insuper ut sit linea K ad lineam L , ut BC ad CG : & eadem L ad M lineam, ut DC ad CE , ex præcepto duodecimæ huius.

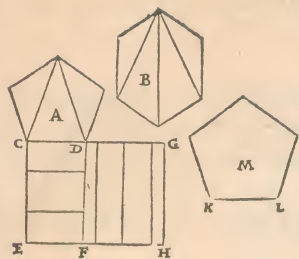
Eritq;, per primam huiusce & vndecimam Quinti, BD Parallelogrammum ad CH Parallelogrammum, ut K ad L : & DG Parallelogrammum ad CF Parallelogrammum, ut L ad M . Ex æquali igitur erit BD ad CF ut K ad M . Atqui ratio K ad M , producit ex K ad L & ex L ad M : ut patet ex quinta Definitione huius. Communi igitur iudicio, produceretur ratio BD ad CF , ex ratione BC ad CG & DC ad CE , Quod erat demonstrandum.

PROBLEMA 7, PROPOSITIO XXVI.

Theoni & Campano 25.

Dato Rectilineo, Rectilineum simile & alii dato æquale constituere.

Sint duo Rectilinea A & B . Volo Rectilineum construere, simile A , & æquale B . Resoluto utroque in sua Triangula, super vno laterum ipsius A , quod sit CD , constituo Parallelogrammum $CDEF$ Rectangulum, æquale eidem A Rectilineo: per quadragesimam quartam Primi toties repetitam, quot fuerint Triangula. Tum per eandem, super linea DF , ad angulum datum ED , constituo Parallelogrammum $DFGH$, æquale ipsi B Rectilineo. Eritq;, per vigesimam nonam Primi, & quartamdecimam eiusdem, tota CH vna Superficies æquidistantium laterum. Pono postmodum



postmodum, per nonam huius, lineam KL mediam proportionalem inter CD & DG lineas: Ac super KL , per decimamnonam huius, constituo ipsi A Rectilineo simile Rectilineum M . Quod dico esse æquale ipsi B Rectilineo. Nam quum CD , KL , & DG sint continuè proportionales: erit, per Confectarium decimamnonæ huius, Rectilineum constitutum super primam CD , ad ipsum M , constitutum super KL secundam, ut CD linea prima ad DG tertiam: ob id, per primam huius, ut CF ad FG : ob idq; per priorem partem septimæ Quinti, ut A ad FG : ac propterea, per secundam partem eiusdem, ut A ad B . Quare, per secundam partem nonæ eiusdem, erit M æquale B , Quod erat faciendum.

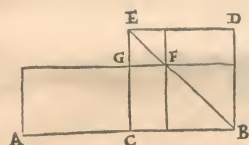
Sed erit promptius ex Permutata proportionalitate. Quum enim sit A ad M ut CF ad FG : erit permutatim, A ad CF ut M ad FG . Quum igitur sit A æquale CF , erit M æquale FG : Quare & æquale B , Quod erat constitutum.

THEOREMA 20, PROPOSITIO XXVII.

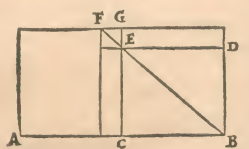
Campano 26.

Super dimidio lineæ Parallelogrammum descriptum, maius est Parallelogrammo, quod super eandem lineam proiectum, alteri quod priori sit simile simiterq; positum, specie deficit.

Sit linea AB , super cuius dimidio CB , descriptum sit Parallelogrammum CDE , cuius Dimetiens BE : & super eandem AB sit proiectum AF Parallelogrammum, cuius vnum laterum secet latus CE in puncto G : deficiatq; specie, Parallelogrammo FB simili similiterq; posito ipsi CDE . Dico Parallelogrammum CD esse maius Parallelogrammo AF .



Est enim, per primam huius, AG æquale CB : & per quadragesimamtertiam Primi, CF æquale FD . Itaque per communem Notionem, totus Gnomon $CEDF$, ipsi AF Parallelogrammo æqualis. Sed CD maius est ipso Gnomone: Quare & ipso AF Parallelogrammo, Quod fuit demonstrandum. Tanto autem est maius, quantum est EF Parallelogrammum.



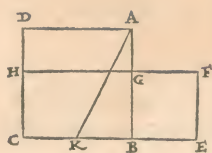
Iam verò si AF altiùs erigatur, quàm CD , ut in secunda Figura: maius etiamnum erit CD ipso AF . Est enim, per primam huiusce, AG æquale GB . Ablatis ergo utrinque duobus Supplementis Parallelogrammi EB inter se æqualibus: erit CD tanto maius AF , quantum est EF Parallelogrammum.

PROBLEMA 8, PROPOSITIO XXVIII.

Campano 27.

Super data recta linea, dato Rectilineo æquale Parallelogrammum aptare, deficiens specie Parallelogrammo, quod simile sit dato. Modò tamen Rectilineum datum maius non sit Parallelogrammo, quod super

o 3 dimid



est æqualis HG, & GF ipsi BG: erit AB ad BG vt BG ad GA, Quod erat constitutum.

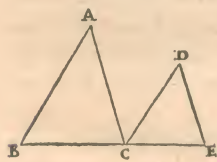
ALITER probatur ex secunda parte decimæseptimæ huius. Constat enim DG esse id quod sit ex AB in AG: item BF esse Quadratum ex BG. Quare tres lineæ AB, BG & GA sunt proportionales, Quod erat faciendum.

THEOREMA 21, PROPOSITIO XXXI.

Campano 30, Theoni 32.

Si duo Triangula ad vnum angulum sic constituentur, vt duo latera duobus lateribus mutuò sint æquidistantia, & eadem inter se proportionalia: duo reliqua ipsorum latera in directum erunt, & linea vna.

Sint duo Triangula ABC & CDE, ad angulum ACD sic constituta, vt latus AB æquidistet lateri DC, & AC ipsi DE: sitq; AB ad DC vt AC ad DE. Dico duas bases BC & CE esse in lineam vnam.



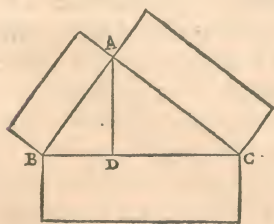
Est enim propter æquidistantiam laterum, vterque angulorum A & D, angulo ACD æqualis: per priorem partem vigesimænonæ Primi: ob id, inter se æquales. Quum igitur latera ipsos angulos continentia, sint proportionalia: erunt Triangula, per sextam huius, æquiangula: & angulus B, æqualis angulo DCE: angulusq; ACB, æqualis angulo E. Itaque, per trigessimamsecundam Primi, tres anguli qui ad C, duobus rectis sunt æquales. Quare, per decimamquartam Primi, duæ lineæ BC & CE sunt in directum, & in lineam vnam, Quod erat demonstrandum.

THEOREMA 22, PROPOSITIO XXXII.

Campano 31.

In Triangulis Rectangulis, quæ à maximo laterum producitur Species, æqualis est iis quæ à duobus reliquis lateribus similes similiterq; positæ producuntur, Speciebus.

Sit Triangulum ABC, cuius angulus A rectus. Dico Speciem quæ à maximo latere BC producitur, esse æqualem ijs quæ à duobus lateribus AB & AC ipsi Speciei BC similes & similiter positæ producuntur.



Ab angulo A demittam AD perpendicularem ad latus BC. Et erunt duo Triangula ABD & ADC, similia toti ABC Triangulo & inter se, per octauam huius: Quapropter, ex Consecutario eiusdem, exurgunt duæ proportionalitates ternarum linearum: scilicet BC ad CA, vt CA ad CD: itemq; CB ad BA, vt BA ad BD. Itaque ex Consecutario decimænonæ huius, Species quæ ex BC prima, ad eam quæ ex CA secunda, similiter describitur, est vt BC prima ad CD tertiam: itemq; Species quæ ex CB prima, ad eam quæ ex BA secunda, similiter describitur, est vt CB prima ad BD tertiam. Species igitur quæ ex BC, ad eas quæ ex CA & BA simul, est vt BC linea ad BD & DC simul. Atqui BC æqualis est ipsis BD & DC

DC

DC . Aequalis est igitur Species quæ ex BC , duabus quæ ex CA & BA similiter describuntur, Quod erat demonstrandum.

HIVIS Demonstrationis conclusio simplex (est enim citra autoritatis testimonium) apertior est, & obscuritatem tollit. Si quis verò rationem à se exigere velit, sic expendat. Species quæ ex AC , ad Speciem quæ ex CB similiter describitur, est vt DC ad CB , per ipsum Confectarium decimænonæ & Conuersam proportionalitatē: itemq; Species quæ ex AB , ad eam quæ ex ipsa BC similiter describitur, est vt BD ad eandem BC . Iam verò ponatur Species AC prima, & Species BC secunda: linea verò DC tertia, & BC quarta. Et insuper, Species AB quinta, linea verò BD sexta. Ac tum, ex vigesimaquarta Quinti, erūt Species AC prima & Species AB quinta simul, vt linea DC tertia & BD sexta, ad BC quartam. Atqui BC linea est æqualis duabus BD & DC . Igitur & Species quæ ex BC , æqualis est duabus quæ ex AC & AB , Quod fuit demonstrandum.

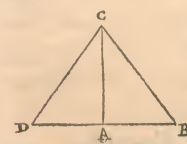
ALITER. Similes Figuræ duplam inter se habent rationem quàm similis rationis latera, per vigesimam huius. Species igitur quæ ex BC , ad Speciem quæ ex CA similiter descriptam, erit vt Quadratum quod ex ipsa BC , ad Quadratum quod ex CA : quum vtrinq; sit dupla ratio quàm laterum. Eodem modo quæ ex BC Species, ad eam quæ ex BA similiter describitur, erit vt Quadratum ipsius BC ad Quadratum ipsius BA . Quapropter & sicut Species quæ ex BC ad duas quæ ex CA & BA , sic Quadratum quod ex eadem BC ad duo quæ ex CA & BA Quadrata. At Quadratum quod ex BC , æquum est Quadratis quæ ex CA & BA , per quadragesimamseptimam Primi. Quare Species quæ ex BC , æqualis est duabus quæ ex CA & BA similiter descriptis Speciebus. Quod fuit demonstrandum.

Hæc igitur generatim complectitur Pythagoricam, scilicet quadragesimamseptimam Primi: & per ipsam (quodam tamen veluti præpostero modo) probatur. Illa enim ex hac innotescere debuit. Geometria quippè generatim & in vniuersum, quantum potest, proponit. Sed tamen Quadrati dignitas separatam ac peculiarem sibi demonstrationem assumere potuit.

Conuersa autem huiusce, ex Campani Demonstratione erit eiusmodi.

Si quæ ab vno laterum Trianguli sit Species, æqualis fuerit ips quæ à duobus reliquis lateribus sunt, Speciebus similibus similiterq; descriptis: Rectangulum est Triangulum.

Sit Triangulum ABC : sitq; Species quæ ex BC , æqualis duabus quæ ex AB & AC similiter describuntur. Dico angulum A esse rectum.



Ponam angulum CAD rectum: Et connectam DC . Eritq; per hanc trigessimamsecundam, Species quæ ex CD , æqualis duabus quæ ex AC & AD similiter describuntur: Quapropter & æqualis ei quæ ex BC simili: quum hæc quoque sit, ex posito, æqualis duabus quæ ex AC & AD . Erit ergo linea DC ipsi BC æqualis. Quare, per octauam Primi, angulus BAC rectus, Quod erat ostendendum.

Poterit & ab impossibili demonstrari, quomodo vltimā Primi probauimus. Quod satis intelliget, qui nostram Demonstrandi rationem illuc perceperit.

THEOREMA 23, PROPOSITIO XXXIII.

In Circulis æqualibus, anguli & qui ad Centra, & qui ad Peripherias consistunt, inter se sic habent, vt Arcus illos angulos fuscipientes. Sed & sic Sectores inter se.

Sint

Sint Circuli æquales, ABC , cuius Centrum D : & efg , cuius Centrum H : sintq; ad Centra, duo anguli BDC & FHG : duo item ad Peripherias, BAC & FEG . Dico primum ipsos BDC & FHG angulos inter se, duosq; BAC & FEG inter se eam habere rationem, quam Arcus BC ad Arcum FG .

Connectam rectas BC & FG . Et continuabo ipsis duobus Arcubus alios Arcus æquales, siue eodem numero, siue dispari: sitq; Arcus BK , per vigesimamseptimam Tertij, ipsi BC æqualis: duo verò FL & LM , ipsi FG Arcui, per eandem, æquales: nempè ducta linea BK , quæ sit rectæ BC æqualis, per primam Quarti: & per eandem, FL & LM , quæ sint ipsi FG æquales. Hinc connectam KD & KA : indè verò LH & MH : tum LE & ME .

Et erunt, per vigesimamsextam Tertij, anguli qui ad D , inter se æquales: & qui ad H , inter se: itemq; qui ad A , inter se æquales: & qui ad E , inter se. Quàm multiplex igitur est Arcus KC ipsius Arcus BC , tam multiplex angulus KDC anguli BDC , & angulus KAC ipsius BAC . Itidem quàm multiplex est Arcus MG ipsius Arcus FG , tam multiplex angulus MHG , anguli FHG : angulusq; MEG , anguli FEG . Quapropter si Arcus KC est æqualis Arcui MG , est & angulus KDC æqualis angulo MHG : & angulus KAC , angulo MEG : & si maior, maior: & si

minor, minor. Quare per sextam definitionem Quinti, erit Arcus BC ad Arcum FG , vt angulus BDC ad angulum FHG , atque angulus BAC ad angulum FEG , Quod est prius.

Dico insuper, esse Sectorem DBC ad Sectorem HFG , vt est ipse Arcus BC ad Arcum FG . In ipsis BC & BK Arcubus, suscipiantur duo signa N &

O : & connectantur BN , KN : BO & CO . Eritq; Triangulum BDC , æquale Triangulo BCK : per definitionem Circuli & quartam Propositionem Primi: quum sint anguli qui ad D , æquales. Et quoniam Arcus BC æqualis est Arcui BK , erit reliquus BCK , reliquo BKC æqualis: Quapropter angulus BOC æqualis angulo BCK , per vigesimamsextam Tertij. Duo igitur Segmenta BCK & BOC , similia, per decimam Definitionem Tertij: quapropter & æqualia, per vigesimamtertiam Propositionem eiusdem. Totus igitur Sector DBC , toti Sectori BCK est æqualis. Eadem argumentatione erunt Sectores HML , HLF , & HFG inter se æquales. Æquemultiplex igitur est Sector DCK , Sectoris DBC , vt Arcus CK ipsius Arcus CB : & Sector item HGM æquemultiplex Sectoris HGF , vt Arcus GM ipsius Arcus GF . Si itaque fuerit æqualis Arcus CK , Arcui GM , erit & Sector DCK æqualis Sectori HGM : & si maior, maior: & si minor, minor. Quare, per Conuersam sextæ Definitionis Quinti, vt Arcus BC ad Arcum FG , sic Sector DBC ad Sectorem HFG , Quod erat demonstrandum.

Ex iis consequitur, vt est Sector ad Sectorem, sic esse angulum ad angulum.

Libri Sexti Elementorum Geometricorum

F I N I S.

L E C T O R I.

IN hac operis nouitate quàm difficile fuerit omnia integra prestare, nobis tacentibus, res ipsa loquitur. Nostrum verò officium fuit, ut de erratis, quæ à nobis ante emissionem internosci potuerunt, te moneremus. Quorum bonam partem sub prælo deprehendimus, & in reliquis chartis restituimus: nequis interim ex ijs locis quos hoc catalogo pro mendosis citauimus, plerosq; integros esse miretur. Caterum quæ diligentiam nostram effugerunt, taum erit benignè condonare.

Pagina 3, linea Superficii pro Spherica lege Circularis

Pagina 4, linea Angulum Rectum pro sectionis lege intersectionis

Pagina 6, linea Definitionis & sequenti, ab ijs verbis vnica linea sic reponē, vnica linea contineatur: sed quatenus Superficies, pluribus contineri possit.

Pag. 13, linea vltima, pro Circulum lege Circulorum

Pag. 16, linea dicij pro quas, quia lege quas, quanquam

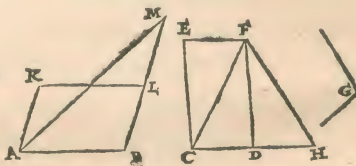
Pag. 18, linea ABC, cuius pro & Triangulum ACD, cuius basis AD lege & Triangulum ACB, cuius basis AB

Pag. 26, linea mamfextam pro ipso BDC lege ipso BEC

Pag. 32, linea A puncto pro perpendicularem AB lege perpendicularem AD

Pag. 37, linea ralleclam lege parallelum

Pag. 43, in Figura quæ initium habet Pagina, deest nota B. Sic ergo reponenda



Pag. eadem, lin. datur pro datur ipsius parallelus interminata lege dantur duæ paralleli interminatæ.

Pag. 49, linea cic lege cies

Pag. 58, linea enim expunge ex

Pag. 65, linea figura, pro & BG lege & FG

Pag. eadem, lin. ÆQVALES deest Figura huic loco accommoda, sed quam Lector facile subaudiat.

Pag. 66, linea ctis B & E pro Hanc etiam lege Hanc etiam BE

Pag. 75, linea BAC pro si BAH lege si BAC

Pag. 76, linea lorum KAH pro KAH & NAF lege KAH & NAM

Pag. 78, linea cti, omninò pro DE lege ST

Pag. 90, linea ctis lineis vbisic legitur æqualis angulo D dato, Quod fuit faciendum. sic reponere æqualis angulo EAB, per trigessimamprimam huius: Quare & angulo D dato, Quod fuit faciendum. Erat enim ob Laconismum obscura conclusio.

Pag. 109, linea pterea pro tertia pars lege sexta pars

Pag. 124, linea ipsius ubi legitur Eruntq; ut FK expunge ut

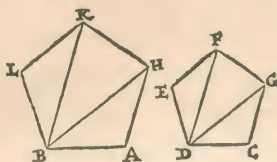
Pag. 135, linea pani pro incitando lege duabus vocibus in citando

Pag. 140, lin. les habent pro habent lege continent

Pag. 140, linea Id est, pro linea lege lineam

Pag. 143, linea CB lege CE

Pag. 156, Figuram vigesimaquarta Propositionis sic reponere, ut pro lineis AK & CF, ducantur BH & DG, iuxta Demonstrationis sententiam.





IACOBVS PELETARIVS

IOANNI FRATRI, NAVAR-
RÆORVM GYMNA-
SIARCHÆ S.



Quod meas in Euclidem Demonstrationes amplissimo Cardinali Lotharingo tua sponte promissisti & recepisti, per gratiū mihi est. Atq; eò etiam gratius, quòd homines intelligunt, id te nō tantū meo in te amore fretum, sed etiā singulari iudicio inductū, fecisse. Virū enim delegisti ex Principum familia: sui ordinis spectatissimum, sapientia, doctrina, auctoritate. Equidem apud me antea decreuerā, meas lucubrationes, his præsertim temporibus, nullius nomine emitte. Sic enim statuebam, in tanta rerū concertatione, ac perturbatione potiūs, Musas in paruo esse numero apud eos qui studiorum adiuuandorum potestatem haberent: non quòd eos sua voluntate à literis alienos esse iudicarem, sed temporum necessitate distractos, se ad literaturam aut animo aut cogitatione conuertere non posse. Ea etiam re, in meo consilio firmius permanebam, quòd ab ijs locis remotus essem, in quibus eius generis occasiones opportunè captare & vrgere solemus. Sed me tua pollicitatio commodè ab instituto reuocauit: mihiq; spatium ad cogitandum dedit, Cardinalem à prima etate in literis educatum, cuius dignitas & amplitudo cum eruditione accreuit simul, tot iam hominum doctorum nuncupationibus celebratum, immò publicorum studiorum Principem & auctorem, nullum tempus ab ingenuis artibus alienum habere posse. Est enim constanti omnium sermone, & rerum ipsarum probatione, quas summas gerit, alta quadam mente præditus, & qui mirabili solertia suis temporibus omnia diuidere nouit. Occurrit tui apud illum non noua notitia, & mei fortasse nominis aliqua commendatio. Quibus rebus non leuiter spero, nobis hunc aditum honori & ornamento futurum. Id verò totū iam inde tibi acceptum refero, & in eximio quodam numero ponoturorum erga me meritorum. Quæ certè tanta sunt, quanta à fratre expectare potui aut debui. Te enim ab ineunte meā adolescentia studiorum meorum moderatorem habui, & in Philosophiæ initijs etiā præceptorē. Ac post, emergente etate, ad vitæ institutionē te mihi prudentissimum monitorem fuisse semper cognoui. Nam quum vestris omnium fratrum consilijs tandiu paruerim, quandiu aut etas aut naturæ ductus tulit, tibi vni præ cæteris auscultauī. Scis enim me Victorio impulsore, totum penè quinquennium in legum studio consumpsisse. Quod institutum mihi nouitatis studio aliquandiu non displicuit: certè quum etas ad maturitatem spectare cœpisset, meiq; iuris

p ac manc

ac mancipij essem, vaga illa rerum forensium tractatione deterritus, ad Philosophiam redij, & te autore ad Medicinam me conuerti. In qua me magnoperè delectauit Naturæ locupletissima historia: ad eamq; professionem satis libenter meæ vitæ modum direxi & composui. Ex illa, me meus Genius ad Magnatum aditum conquirendum interpellauit. Ubi quantum profecerim, me certè non pœnitet. Quod enim præter animi sententiam accidit, vtrum mea culpa an meo quodam fato acciderit, nihil dico: vnum hoc dico, me ex ea affectatione, ad vitæ rationem multa præcepta reportasse. Hominum enim diuersa consuetudo mihi non parua acceßione iudicium confirmauit: & scribendi facultatem comparauit. Nemo enim quicquam laude dignum scribet vnquam, nisi qui rerum ipsarum variam cognitionem ad studium illud vmbatile adhibendam sibi proposuerit. Quippè quum ad scribendum sit Genius quidam, qui si lectione tantum foveatur, non etiam experientia & vsu roboretur: non consistet, neque ad atates ferendas idoneus euadet. Atque ea de causa, quæ in Poëtico genere scripsimus, ad temporum memoriam transitura speramus. Certè Oratio nostra Pacificatoria nos rerum non ignaros esse testatur. Quæ verò in Mathematicis scribuntur, ex rata & firma veritatis professione, suum habent Geniū immortalitatis. Poëticen quidem amplexi sumus, animi impetu & ardore quodam, post etiam ingenij concertatione. Sed deferbuit iam illa laudis contentio nostra. Poeticos illos spiritus sensim remitto: Mathematicas in perpetuum retineo. Hæc enim studia mihi destinata esse sentio. Quibus quum antea delectarer, nunc etiam viuo. Quid facerem? honores non sitio: gloriam non desidero. Interim tamen sic viuo (dicam enim apud te ingenuè id quod res est) tanquam id quod non postulo, expectem. Eas disciplinas colo & amo, non modo quod, vt ille de re rustica dicebat, minimè male cogitantes sint qui in eo studio occupati sunt: sed quod omnium maximè diuinas esse iudicem. Theologiam vestrâ excipio: nisi rerum diuinarum cognitio è Mathematicis emeruisse concedatur, Platonis testimonio, qui Deū sine fine *ἡρώεσπεῖν* existimabat. Nam quid ego de Numeris dicā? quorum consecutio & natura, imaginē quandam æternitatis refert. Rerum concordiam, animorumq; sympathiā euidentissime exhibet Musicæ harmonia. Diuini illius opificij principia, & constitutionem certissimis dimensionibus firmatam, obijcit Geometria speculatio. Denique ad Deum Optimum *Max.* suspiciendum, animos nostros erigit rerum cælestium contemplatio. Quanquam scio te in eo à me valde dissentire. Mihi enim per literas declarasti, Mathematicas vestræ Theologiæ alienas, & propè contrarias esse. Equidem illud de te miror: quum eas artes olim docueris, dum Philosophiæ stadium conficeres: per quas etiam vobis aditum ad vestram disciplinam præstruitis. Quid? an existimabimus veteres Academiarum nostrarum principes, Mathematicas vt necessarias, præscripsisse, vt post demum tanquā inutiles, immò contrariæ repudiarentur? Sed non est huius loci hæc disputatio. Ad propositū reuertor. Demonstrationes nostras in sex Libros qui de Planis scripti sunt, iam tandem emitimus. Quod à nobis citius esset factum, nisi operis difficultas Typographos esset remorata. Te igitur promissis libero: & meam fidem iam inde singulari quodam pacto apud Cardinalem astringo: & Deo iuuante præstabo. Neque enim nisi perfecta re, conquiescam vnquam. Vos verò mirum in modum videre cupio, totusq; Lutetiam vestram cogito, huius longinquitatis temporum & locorum pertæsus. Atque ea re,
hanc

hanc defectionis occasionem mihi esse oblatam vehementer etiam atque etiam la-
tor. Tu interim me fraternè, quod facis, ama. Alexandro, Victorio, & Petro fra-
tribus, Cenomanis salutem meis verbis scribes, Iuliano istic dices. Vale. v. Id. Apri-
lis, Lugduni.

I A C O B V S P E L E T A R I V S
P O N T O T I A R T O S.



Q V V M essem apud te in Bisiano, multumq; ac saepe de studijs no-
stris inter nos colloqueremur: dixisti te Euclidem Civibus nostris
dare constituisse. Idq; libentiùs te facturum esse significasti, quum
meas demonstrationes in sex Libros Elementorum priores, tibi osten-
dissem: quas tibi valde probari sensi. Equidem, cum mea, tum pu-
blica etiam caussa, consilium tuum laudo, & mentem istam tibi gratulor. Neque
enim ex amicis chariorem, aut ex nostris hominibus doctiorem mihi optare pote-
ram, qui meas lucubrationes nostrae nationi commendaret, quàm te vnum. Quod
enim de me dicere soles, me in scribendo tantum industria ponere, id ego in teipsum
refero: cuius diligentiam & solertiam cum in rebus omnibus, tum in ipsa scribendi fa-
cultate singulare admiror. Quumq; ad meã utilitatem semper cum Poeticis res Ma-
thematicas coniunxerim, idem tibi vsuvenisse video, & vehementer gaudeo, nostra
vtriusque gratia: quò communitas illa studiorum & voluntatum inter nos sit illu-
strior. Ac tamen si patrio sermone scribere desy, nunquam tamen hanc mea genti
gloriam felicitatemq; inuidebo, vt linguam copia, splendore, dignitate, omni denique
opum genere auctam & ornatam aliquando habeat. In quod ego officium, summa
ope paulò ante nirebar. Id verò nulla ratione commodius fiet, quàm si optima quæq;
ad ipsam traducantur. Incumbe igitur, mi Tiarte, in eam, vt facis, prouinciam. Tibi
enim in isto quo frueris otio, nihil est quod maiori glorie aut ornamento esse possit.
Demonstrationes meas ad te mitto. Ex quibus quidquid laudis à temporum memo-
ria ostenditur, id te mecum participare cupio. Quinetiam tu apud nostros non dubito
quin maiorem gratiam sis consecuturus, quàm ego: qui iam aliud nihil expecto,
quàm vt me primo quoque tempore desertorem appellent. Habent tamen à nobis
alia non vnus generis officiorum monumenta: quæ vtinam tam grata sint, quàm
ab animo liberali sunt profecta. Nunc ad Romanos transeo. A quibus ampliorem
honestioremq; conditionem nescio quo augurio mihi polliceor. Ea enim gens omni me-
moriam, quos semel in fidem recepit, sanctissimè retinuit, & fortissimè propugnauit.
Galli verò externorum vnice amantes, & suorum egregij contemptores semper fue-
runt. Quæ res, opinor, effecit, vt me tandem aliquando Gallum profiterer, & ad exte-
ros transfugerem. Sed heus tu, inquires: quò te is perditum? Eiusmodi mores nemo
Romanus æquo animo feret. Equidem illos aut omninò mihi exuendos, aut gnauius
disimulandos esse video, nisi quòd causam mea defectionis probaturus sum: &
quod caput est, in fide permanebo. Sciunt enim qui me norunt, quàm sim firmus in

retinendis consilijs. Sed hæc posteriora quanquam tecum iocatus sum, tamen ridentem dicere verum nil vetat. Ad Euclidem redeo: quem, ut instituisti, Gallicè tractabis: hoc est, per te, splendide: & per patriam, opiparè. Neque enim tibi verba innovare erit religio in argumenti novitate. Quæ quum suo charactère insignita erunt, neque lucem reformidabunt, neque civitate reiciuntur. Demonstrationes nostras concisas illas quidem, sed tamen, ni fallor, appositas comperies. Laconismum verò, si videbitur, longius extends. Licet enim diffusas Demonstrationes non probem, tamen nostros Cives huic disciplinæ minime assuetos, prolixius docere non erit alienum. Siquid autem erit quod diligentiam nostram aut animadversionem effugerit, id tu repones, amici officio. Nunquam enim doctorum hominum castigationes moleste tuli: sed in hac imprimis tractatione veritatis, etiam imploro. Atque adeò, ut tu sis sciens, ego mea scripta ad Alomi lucernam dispici & examinari cuperem: qui etiam in Euclidem animadverterim, ut iam tum apud vos tibi communicavi. Quinimò hanc editionem maturavi, ut si quæ essent minus rectè posita (quidni verò futura sunt?) in tempore deprehensa, à me reponerentur in melius. Leuem quippè existimationis iacturam esse iudico, quæ solidam emendationem in perpetuum ostendit. Vellem tamen hæc à me sine causa in dubitationem asferri. Utut erit, ego non tam properationis pœnas sum daturus (scis enim quandudum hoc saxum voluam), quàm securitatis. Nam in ijs quæ procluvia visa sunt, me ferè præcipitem dedi. Scis etiam me, nisi in difficilibus immorari non solere. Sed nos de his pluribus verbis inter nos. Vale. Lugduni.

I A C O B V S P E L E T A R I V S
P E T R O R O N S A R D O S.



SCIS quanti te semper fecerim, mi Ronsarde. Me verò abs te non parui fieri exploratum habeo. Nam & amicitie nostræ memoriâ mutuo testimonio posteritati prodidimus. Quod certe ad vitam ipsam non parum affert momenti. Habet enim ea publica confirmatio singularem quandam delectationem. Sed & ad me valde pertinere arbitror (neque te aliter esse affectum existimo) ut omnis ætas intelligat, nos non modò temporum, sed etiam animorum coniunctione copulatos fuisse. Igitur ex tuis scriptis voluptatem, & gloriam capio. Etenim ea demùm iucunda & honorifica laus, quæ ab ijs proficiscitur, qui & ipsi in laude viuunt. Id tamen nescio an in laudationis loco sumere debeam, quòd tu me putas ab amore destituisse, & ea re saluum esse. Nène amoris expertem unquam esse posse? An non ex scriptis meis constantiam, atq; adeò obstinationem meam perspexisti? Immò omnino amore abundo. Ego illa, quam ita superbam & fastidiosam habui, iam vtor benigniore. Quid tu putas? Ex quinq; illis quæ Amor ostendit, præmijs, basium accepi. Sed non pergam tecum alludere. Amorem illum Platonicum significo: hoc est, ut scis, diuinum. Ex quo eum quem percipio fructum, totum statim communico: riualesq; mihi paro, præter amantiū morem. Atq; adeò in huius felicitatis partem, nullum mihi socium dari malim, quàm te ipsum. Scis enim

enim quanta fuerit dudum inter nos studiorum consensio & conciliatio. Ex quo tempore etiam nobis tertius adscriptus est Ioachimus Bellaius. Qui quum à nobis iam tanto temporum locorumq; intervallo distractus sit, quo in me sit animo nescio. Id de me scio, me illius memoriam magna cum benevolentia tenuisse. Neceſſitudinem enim illam, quæ Musarum beneficio & sanctione constituta est, nulla vi temporum infringi posse iudico. Quod tu perpetuò in nostra amicitia retinenda declarasti. Memini, quum esses etiamnum adolescens, me aliquot annis superiorem quanta benevolentia obseruares, Musarum nomine: à quibus quum antea ad Regiam affectionem abductus fuisses: ad eas te recepisti felicissimo postliminio. Varium enim & omni numero Poëma scripsisti: ut ea quæ hoc tempore sunt apud nostros in manibus, scriptorum genera, multi secuti sint te magistro. Matheseos verò studium, quantam dignitatem asserat operi Poëtico, nihil attinet commemorare, apud te præsertim in disciplinis apprime eruditum. Sed & ipsius Geometriæ lineamenta, quauis in Poëtis minus elucere videantur: ea tamen vna ars caterarum artium proculdubio dux & magistra est. Nosti enim Platonis illud peruulgatum, ἀρετὴ ἐν τῷ δέῳ ἐστίν. Ad hæc, incredibilem illa voluptatem affert, certissima specie & consecutione præceptorum. Ad quam ego te hortarer, nisi te scirem ad optima quæque tuo ductu amplectenda & consequenda natum & educatum. Habes ad res summas, præcipua illa adminicula, ingenium, genus, fortunas: neque tibi quicquam deest ad bene beateq; viuendum. Ego verò in eorum studiorum commemorationem incido, animi mei alacritate quadam impulsus: quam mihi parit maximam, eiusmodi meditatio. Quinetiam ad Mathematicas artes cohortationem nuper scribere ingressus soluta oratione, nescio quo impetu in versus erupi: quos è medio transcriptos tibi mitterem, nisi id totum in aliud tempus reseruasssem. Eos tamen tibi coram recitabo, ne me putes Phæbum deseruisse, aut Musas alienas habere: quum etiam Romana poemata pangam. Sic ego sum: sic vior otio meo: dum tu Principes amplecteris, & in gratia apud eos viuis. Tibi verò seriò gratulor istam fortunæ & genij facilitatem, cui & ad summorum hominum benevolentiam retinendam, & ad operam studijs & scriptis impendendam abunde tempus suppeditat. Ego autem nihil ex animi sententia, nisi in secessione & solitudine possum scribere. Nos, ut spero, de ijs propediem otiosè colloquemur. Vale: & te à nobis tantum amari ne dubites, quantum nos abs te cupimus & confidimus. Lugduni.

IACOBVS PELETARIVS
MAVRICIO SCÆVÆ S.



EXPOSVISTI aliquando mihi nonnullorum querelas, qui dicerent me nimium mihi viuere, atque hominum consuetudini & gratia parum seruire. Quod genus expostulationis scis me non prorsus contempsisse, sed tamen satis leuiter tulisse: præsertim quum, ut præte ferebas, id non tuo iudicio, sed ex aliena opinione proponeres. Quinetiam te meam causſam suscepisse, & iniquos de me sermones depulſisse intelligebam:

bam: quod ipsum mihi pro nostra amicitia gratissimum fuit. Fateor, Scæua, me artificia illa benevolentia colligenda exquisitè non obseruare. Probitate enim amicitias mihi comparandas & conseruandas semper existimaui potius, quàm gratiosa commendatione, aut affectata diligentia: quanquam, quum opus fuit, mihi non desuerunt adminicula fouendorum hominum. Sciunt ij qui me norunt, quanta fuerit temporum meorum varietas: quam non tam facile sustinuissem, nisi mihi esset aliqua non male subducta ad viuendum ratio. Scio ego quàm facile incidere soleam in sermones hominum: immò adeò, quàm facile mea fortuna inuidos & obrectatores inueniat. Quid dico fortunam? fatum dicere debui. Neque enim felicitate inuidiam mihi concitavi: an virtute, nescio: certè id operam dedi, ne meo merito. Mea sic semper fuit vitæ ratio: Qui mihi res suas bona fide commiserunt, à me nunquam decepti sunt: qui de mea voluntate non obscure dubitarunt, quam aliqui perspectam non haberent, ijs non admodum succensui: sed vt de me quamoptimè sentirent sedulo curavi. Qui verò meam fidem tentare, aut simplicitatem interciperi conati sunt, eorum consilia aut arte, aut patientia, aut distractione elusi. Qui simulatq; sibi ereptum senserunt quod à mea facilitate sibi promiserant, ibi repente simultates gerere cœperunt, à me certè non ortas, sed ab ipsorum artificijs. Nihil enim grauius detestor, quàm astutias: quas ne meo quidem commodo ferre possum. Eas autem explorare & olfacere meo periculo didici, sepè ab amicis desertus, non semel etiam proditus. De quo apertiùs essem conquestus, nisi me ad lenitatem finxisset natura, ad æquabilitatem Philosophia: qui ne inimicis quidem restiti laceßitus, nisi ijs quos saluis meis rebus missos facere non potui. Nemo vnquam ad conquirendas amicitias propensior, nemo eorum quibuscum vixi, studiosior fuit, quàm ego ante hoc tempus fuerim. Id quia nimis accuratè feci, multi omnia à mea lenitate sibi deberi arbitrati sunt: neque iam integrum mihi esse putant à meo more discedere. Siquid de illa salutationum consuetudine præterij, si inuisendi officium intermisi, si adeundi copiam non feci, si colloquendi facultatem non dedi, me morosum, me singularem esse queruntur. In eam verò partem liberalitatis deinceps, si potero, non peccabo: ne à me sit alijs peccandi occasio. Ne iam tempus admonet, vt eam quàm ipsi me docuerunt, cautionem mihi adhibeam: & meam familiaritatem abuti desinam cum ijs qui familiaritate vti nesciunt: Si modò hoc consilium mihi ratum esse poterit: vix certè erit. Noui enim me, quàm sim *Φιλαυδωπίας* morbo obnoxius. Atenim temporì seruiendum. quasi verò quicquam intersit, vtrum temporì cedas, an seruias. Ego quum multorum arbitrio viuere non possem, meo modo aliquando mihi viuendum esse statui. Totam eam amicorum turbam, qui omnia temporis causa faciunt, non officij, à me excutiam: paucos mihi aptos retinebo, si multos nō liceat: quos ego tanti faciam, vt quum ab ijs me amari sensero, ceteros qui me non amabunt, neque amicitia vim tenere, neque virtutis amantes esse putem. Alij dum versor in solitudine, dum intra eos quos mihi Philosophia circundedit cancellos, me contineo: se molliter curent: per me licet. Neas res aduersas, quibus isti me oppressum esse putant, faciliùs fortasse feram, quàm ipsi suas, in quibus volutantur, delicias. Interea siquid præter spem acciderit, aut in melius interpretabor, aut arte corrigam: siquid boni, id in lucro deputabo, sicut me Comicus docuit. Si in ea vitæ fabula mihi felicitatis persona non obtigerit,

virtutis

virtutis certè non deerit. Gaudebo minus, at minus dolebo. Id verò pro mea parte enitar, vt ad omnem vitæ statum subsidia mihi parare possim. Præter hæc, non tam laborabo quibus charus sim, quàm quibus charus esse debeam. De multis hætenus & priuatim & publicè bene merui. Qui si in officio aliquando erunt, eorum voluntati, quoad potero, non deero: & meam operam bene collocatam esse lætabor: si minus, meorum meritorum & laborum conscientia me consolabor. Sed quàm vellem, vt ij qui meam ab officio, vt ipsi expostulant, cessationem accusant, de meis laboribus cognoscere & iudicium ferre didicissent: ij, vt opinor, me de tota ea accusatione absolui paterentur. Sed in hac re non dubito quin æquis rerum æstimatoribus causam meam sim probaturus. Eos qui aut præsumptio quodam studio, aut simulatione omnia metiuntur, nihil morabor. En Euclidem meæ in Rempub. perpetuæ voluntatis nouum obsidem offero. In quo vtinam aliquando te occupatum videremus, Scæua. Tum demùm intelligeres, quanta fruantur voluptate ij, qui se à multitudine ad tempus remouent: quanquam id te aliquando expertum esse, res ipsa ostendit. Singulare enim specimen è solitudine edidisti. Sed ea, quam nos in te conspiciamus, ingenij solertia maius quippiam à te requirebat. Te Geometria poscere videbatur. Quod à te an expectare debeamus, in te positum est. Si animum induxeris, nihil est quod in Mathematica perceptione non sis effecturus. Te quidem ætas affecta, te minus firma corporis constitutio à laboribus auocant. Scio te valetudini operam dare oportere. At illa, mihi crede, studiorum alacritas, ex summa animi delectatione, corpus tibi confirmabit. Homini tam diuinis rebus dedito non vacat egrotare. Non valet qui sine studijs viuit. Quinimò otium absque literis mors est, & viui hominis sepultura. Id verò etiam mea causa magnopere expecto. Nam quum te ad solitudinem reductum viderint ij, quibus sermonem dare soleo, eos subito æquiores ex tua secessione sum habiturus. Vale. Lugduni.

IACOBVS PELETARIVS
IOANNI FERNELIO FRANCIAE
ARCHIATRO S.




ÆPENVMERÒ mihi cogitanti de rerum conditione & natura, id vnum in vita difficillimum videri solet, meditationem cum ipsa actione coniungere: id est, mentis functiones ad vsus externos traducere: non quòd vtrunque munus ad hominis ingenium non sit valde accommodatum, sed quòd speculandi delectatione animus suapte natura præcipuè capiatur: à qua quum ad agendum abstrahitur, minus officiosus esse cogitur, cum ex insolentia, tum quòd ad res obeundas alieno auxilio indigeat. Quo fit vt pauci sint, qui ad animi studia & ad rerum tractationem æquabiliter sint idonei. Te verò, Ferneli, non possum non laudare, qui vtrunque ea felicitate perficis, vt in otio cum actione: & in negotio cum meditatione versari videaris. Quæ enim in Mathematicis, quæ in Philosophia, quæ in re medica tam diligenter scripsisti, mihi in animum subiiciunt, quàm rari sint nostra ætate

qui cum iudicio scribant. Quo verò successu, quaq̃ existimatione Medicinam facias,
 res ipsa loquitur: Cui & Regiæ valetudinis primaria provincia incumbit: & publicæ
 curationis spectata fides. Sed hæc commemoratio ad epistolæ argumentum minus
 pertinet: nisi quòd gratulationis officium libenter impertiri soleo ijs, quibus aut ami-
 citiæ, aut dignitatis nomine id à me deberi puto. Venio ad eam occasionem quæ mihi
 ad te scribendi præcipua est: nimirum ut apud te meæ causæ defensionem præoccu-
 pem, & ante litem mihi iudicem parem: eorum videlicet more, qui de prælio suspi-
 cantes, hostis aduentum anteuertunt. Existimo non defuturos qui Commentationum
 nostrarum in Euclidem, editionem non æquo animo ferant. Ac primum omnium
 obijcient, quòd aliorum Demonstrationes nobis sumamus, & utamur pro nostris.
 Deinde, opinor, festinationem nostram improbabit, quòd ne dimidium quidem
 operis proferamus. Sed prior illa reprehensio, ut confido, non magnum pondus inuidiæ
 est habitura, apud eos qui æquiori iudicio rem expenderint. Qui enim nos accusabunt,
 non iam Campanum, sed Theonem ipsum accusent oportet: quorum ille alter nihil
 ferè habet, quod à Theone non sit mutuatus: hic verò ipse aliorum probationes per
 manus traditas congest. Quid enim? an existimamus Propositiones Geometricas ab
 Euclide in ordinem esse redactas, quæ non antè suis assertionibus confirmatæ essent?
 an verò Theorema de laterum Trigoni Rectanguli potentijs tam celebre, à Pytha-
 gora Samio relictum fuisse putamus, nisi sua demonstratione munitum? Quid ante
 eum, Thaletem? quid post eum, Platonem, Hippocratem Chium, Architam Taren-
 tinum, ac totam Geometrarum nationem fecisse putamus? an deniq̃ Euclidem Pro-
 blema illud ab Oraculo propositum de Cubo duplicando, prætermisurum fuisse crede-
 mus, si constisset demonstratio? Immò adeò, idem ipse autor quid aliud fere ad Geo-
 metriam attulit de suo, quàm ordinem? Denique quid est in omni scriptorum gene-
 re, quod quisquam sibi vendicare aut propriè suum dicere possit, præter collocationem?
 Nobis verò quur inuidebitur, si ea nostro nomine emisimus, quæ sic excoluimus, ut
 aliena dici non possint? quum interim multa protulerimus, quæ non modò non tra-
 latitia sunt, sed noua omninò & hætenus non cogitata. Quæ à Theone & Campano
 accepimus, meliora effecimus, aut concinnitatis specie, aut compendij dignitate. De-
 monstrationes enim, nostra sententia, breues & cordatas esse oportet. Quibus rebus
 quum ad eas meditationes pulcherrimas incenderimus animos studiosorum, inui-
 diâ, si qua in nos orta fuerit, publica approbatione remouebimus. Quod ad alteram
 offensionis partem attinet, qui nos de properatione arguent, sic habebunt: nos, quum
 ad scribendum accedimus, cogitare non solere, quàm magnum opus, sed quàm vile-
 simus daturi. Planorum argumentum à Solidorum materia seorsum exhibuimus.
 quid tum? si, quod peculiarem habet tractationem, separatim tradidimus? Cuius
 editionis retardationem commodiùs profectò sustinuissem, quàm Geometriæ studiosi.
 Neque enim mihi homini philosopho tanta honoris & laudis, quanta hominibus in-
 genuis, scientiæ & doctrinæ cupiditas esse debet. Hos libros velut arrhabonem quen-
 dam exhibemus, dum opus integrum extruere pergimus, neque laborem intermitti-
 mus. Ac tametsi hi libri priores, totius ædificij speciem ostendunt, & ichnographiam
 continent: velim tamen à nobis se nihil accepisse Respublica existimet, donec opus ab-
 soluerimus, Deo Optimo Max. qui nos ad hoc munus destinauit, approbante. Tu
 verò,

verò, Ferneli, si factum nostrum probaueris, magnum nos laborum nostrorum fructum percepisse existimabimus. Sin erit in quo à nobis dissencias, id etiā in vtilitatem emendationis conuertemus. Scis enim in nostra scribendi professione quid nobis sit exoptandum: scilicet, doctos homines nobis ex animo, non, vt in ceteris scriptorum generibus fieri solet, gratiæ caussa suffragari. Vale. Lugduni.

IACOBVS PELETARIVS
HIERONYMO CARDANO S.

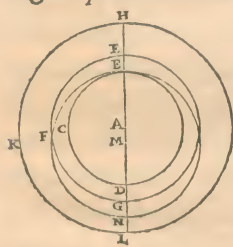
 VVM neque vbi terrarum esses satis compertum haberem, neque esset cui commodè hanc ad te Epistolam darem in hac rerum & temporum perturbatione, eam publicè ad te mittere constitui: praesertim quum argumentum ipsum penè esset publicum. Illud enim officium literarum, quod priuatim in amicos conferri solet, non putabam te à me requirere: propterea quòd ipsa Philosophia commendatio optima animorum conciliatrix, ad conseruandam beneuolentiam satis per se habet momenti. Tum publica illa scribendi professio efficit, vt eos qui longo interuallo distracti sunt, praesentes semper habeamus, & cum ipsis, immò cum mortuis familiariter ac saepe colloquamur. Atq; in meo dolore, quòd doctissimorum hominum, qui paulò ante vixerunt, consuetudine aut notitia non sim potius, hac sola consolatione vtor. Copernici memoriam sanctissimè colo. Monumentum enim nobis reliquit sui nominis & ingenij sempiternum. Gemma Frisy mortem, quæ proximè ad nos allata est, pro eo ac debui, moleste tuli: ad quem etiam scribere institueram, & me breui eum visurum sperabam. Iam tum antea Erasmus Reinoldus, Copernici doctissimus interpres & imitator, decesserat. Schonherum, Stifelium: Fracastorium, Gauricum, multosq; nostræ Matheseos principes, quos Germania, & Italia item vestra aluit, nunquam vidi: ea quidem caussa, quòd neque ætate aequalis, neque temporis ratione satis instructus essem ad proficiscendum. Quorum omnium desiderium, benigna recordatione sustineo, & eorum scriptis legendis leuius fero. Te verò Cardane, Lugduni, vnde nunc ad te scribo, familiarem diebus multis habui: quum in Scotiam tibi iter esset. Quæ notitia mihi charissima & iucundissima fuit. Erat tibi tum inter manus, Librorum tuorum quos de Subtilitate scripseras, recognitio. Atque, vt ad instituti mei rationem explicandam ingrediar, memini te mihi locum illum ostendere, de duabus lineis, quæ quum coitionem affectare videantur, nunquam tamen concurrunt. Ex quo tempore non destiti tecum dispicere, quānam ratione id in Geometria constaret. Nam quum firmissimo praeiudicio mihi proposuissem, Geometriam eiusmodi esse, quæ ab omni repugnantia & Paralogismo, remota esse deberet: eam tandem comperi suis quidem miraculis non carere, sed probationis subsidium nunquam desiderari. Demonstrationem igitur à nobis peruestigatam, tertio Commentationum nostrarum libro adscripsimus. Alterum item de angulo contactus Paralogismum à te propositum dissoluimus. In quo vt etiam intelligerent studiosi, nos rationibus nostris nihil deesse voluisse,

tuum

etiam iudicium nobis adhibendum esse duximus : & alteram confirmationem huic loco etiam pleniorē subscripsimus. Atque imprimis hoc nobis est prae-mittendum,

In Circulis, anguli qui fiunt à Diametro & Peripheria, sunt aequales.

Sint enim super Centro A, duo Circuli BCDB & EFGE, quorum Diametri BD & EG. Et secet EG ambos Circulos in punctis E, B, D, & G. Aio duos angulos CBD & FED esse aequales. Nam si sit FED maior ipso CBD (neque enim contrà, CBD maior ullo pacto erit ipso FED) : ac describantur plures Circuli super eodem Centro A, quorum vnus hoc loco satis fuerit HKLH : fiet tandem ex continuo augmento, angulus à Diametro & Peripheria, verbi gratia, angulus KHL, maior recto : Quod est contra ipsius Euclidis sententiam, qui eos omnes angulos ponit recto minores. Sunt igitur anguli interiores, qui ad B & E, inter se aequales, Quod fuit ostendendum. Idem & de exterioribus iudicium.



Neque in hac demonstrandi ratione ullus est Paralogismus. Licet enim nulla sit comparatio angulorum, quos vocant, contactus, ad angulos Rectilineos : attamen erit angulorum qui fiunt ex sectione rectae lineae & Peripheriae, aliqua collatio ad ipsos rectilineos. Eiusmodi enim anguli, qui Mixti dicuntur, manifestè maiores & minores fiunt.

His ad hunc modum demonstratis, aio contactum Circulorum interiorem, non esse quantitatem. Super Centro M, in eadem linea HL posito, describatur Circulus BFN B, tanto intervallo, quanto est Circulus EFGE : posita scilicet MB Semi-diametro, aequali ipsi AB : qui Circulus tangat BCDB Circulum in puncto B. Et manifestum est, angulum FBD, aequalem esse angulo FED, propter aequalitatem Peripheriarum & Diametrorum : Quapropter & idem ipse FBD erit angulo CBD aequalis. Igitur CBF contactus, nihil addit ad ipsum CBD angulum. Quare CBF quantitas non est, Quod fuit probandum. Atq; hinc procedit demonstratio eorum quae illuc adduximus, Theorematum : quae hoc loco repetere nihil attinet. Tu verò pro tuo otio omnia examinabis. De quibus quid sentias si mihi aut priuatim aut publicè significaueris, pergratum mihi feceris. Vale.

IACOBVS PELETARIVS
PETRO NONIO S.



NON dubitabam, Petre Noni, quum nostrae in Euclidem commentationes ad te peruenirent, quin me erga te bene affectum, vel ipso doctrina nomine, esses existimaturus. Hac enim nostra Mathematicarum artium studia eiusmodi sunt, ut eos qui ipsa amplectuntur, mutuo amore deuinciant. Quid enim veritate, quam nos tractamus, candidius ? quae maior ad conciliandos animos vis esse potest, quam eius quae animorum perpet

perpetuitatem maximè testatur, scientiæ? Memini ego quum Mathematicis initiarer (quod quum tarde fecissem, magna etiam intermissione, ob temporum meorum varietatem usus sum) ac studiorum successione tua scripta euoluerem, me magna spe & alacritate fuisse incensum, ut aliquando pari facultate & iudicio scribere liceret. Librum de Crepusculis abs te diligentissimè scriptum avidissimè legebam: & alterum item illum, quo in nostrum Orontium animaduertis. Qui utinam tam plausibilem præ se ferret titulum, quàm est Mathematico, id est, vero argumento conscriptus. sed tamen veritate ipsa apud sinceros animos nulla res potior debet esse. De me verò quum dico, animum quidem meum tibi testatum facere cupio: sed interim mihi polliceor futurum, ut mihi in amore respondeas, simulatq; tibi innotuero: scilicet, ubi primum hæ nostræ Demonstrationes tibi in manus venerint. Non enim puto te ante hoc tempus de me audiuisse, qui patrio sermone hucusq; ferè scripserim: cuiusmodi & Ars nautica abs te edita in tuorum manibus versatur: & Algebram etiam abs te scriptam audio. Sed has ipsas Demonstrationes sine maiori meæ erga te benevolentie testimonio exire nolui. Ac velim intelligas, me nihil magis optare, quàm te meorum scriptorum censorem mihi dari. Ea q; gratia maturo quantum possum (neq; properationem affecto tamen) laborum meorum publicationem, ne is mihi pereat fructus, quem ex vestro omnium iudicio, aut etiam castigatione, capere possum. Omnino enim aliter sum affectus, quàm ceteri. Non me pudet doctorum hominum iudicium quocunque meo dispendio experiri: modò id tandem in meum commodum reponere sperem. Quod in me quisque animaduernerit, id in maximo existimationis lucro deputabo. Cuius mihi satius est temporariam iacturam facere, quàm perpetuam. At enim, inquires, quid est quòd temporis beneficio non vteris? quur te ipsum in consilium non adhibes, moræ patieris? Rectè. Sed omnibus hominibus, mi Noni, proclive est ut peccent, etià in veritatis luce, in qua ipsa offendere, alienum imprimis & inhonestum esse videtur. Emendatio non tam constat tempore, quàm consilio. Consilium verò ipsum ab amico præstat, & diuturni temporis vice est. In re nostra tam lyncei esse non possumus. Nobis planè providentia illa præscribit, ut mutuas operas præstemus. Sed ego longius digredior. Ad me reuertor. Tuum erit, mi Noni, non tantum amici nomine (quod tibi ingenua amoris professio præscribit) sed etiam veritatis contemplatione (quò te publica utilitas inuitat) meas lucubrationes, quatenus vacabit, examinare. In quo longè felicior fuisset, si tecum per locorum intervallum, communicare licuisset. Sed quid locorum intervallum mihi prætendo? Immo verò, fato quodam meo neque præceptorem in his studijs, neque socium vnquam habui: ne in Gallia quidem nostra. Meditatione omnia sum assecutus. Qua occasione symbolum illud ex

Periandro mihi sumpsit, μέλει τὸ πᾶν. Quæ verò assequi potui, ea libenter impertio. Idem verò abs te etiam expecto, mihiq; gratissimum erit,

si aliquando intellexero tibi amicitiam meam curæ fuisse.

Quod tum demùm intelligam, si me de ijs quæ ad existimationem meam & publicam utilitatem pertinebunt, monueris.

Vale. Lugduni.



I A C O B

IACOBVS PELETARIVS
PASCHASIO HAMELIO MA-
THEMATICARVM REGIO
PROFESSORI S.



MIRABVNTVR, opinor, nonnulli, quòd in hac Demonstratio-
num editione nimis de me ipse diffidere videar: dum eorum ad quos
scribo tam studiosè fidem obtestor, & opem imploro. Verùm eo con-
silio id facio, vt palàm profitear quàm longè absim ab eorum homi-
num confidentia, qui ambitiosè res suas ostentant, & pari impu-
dencia aliorum inuenta sibi tribuunt. Quanta cura, quanta meditatione scripserim,
mihi conscius sum: quid præstiterim, aliorum iudicio relinquo. Equidem in meis lu-
cubrationibus alijs, non ita supplex esse soleo. Sed in hoc Geometria spectaculo, nobis
modestiae persona imposita est, non ostentationis. Multorum hominum & seculorum
adiumenta huc conferenda sunt. Tibi verò, Paschasi, id muneris præ ceteris incum-
bit, vt tuam in hac re, quod facis, operam præstes. Eam facultatem tua doctrina,
quam assiduo studio singularem comparasti, tibi concedit: opportunitatem abunde
suppeditat Regia illa professio: Illud verò in mea causa officium, nostra etiam amici-
tia à te postulat. Vale. Lugduni. M. D. LVII.



